VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas

13, 14 y 15 de febrero 2012

Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales

ACTAS 2012

Conferencias
Talleres
Reportes de Investigación
Experiencias Didácticas
Pósteres

Departamento de Ciencias
Sección Matemáticas-IREM
Maestría en Enseñanza de las Matemáticas

PUCP

Coordinadora: Cecilia Gaita Iparraguirre

Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales
VI Coloquio Internacional Enseñanza de las Matemáticas
Actas 2012

Primera edición, marzo 2013

Tiraje: 100 CD

Coordinadora: Cecilia Gaita Iparraguirre
Diseño de etiqueta del CD: IND. GRAFICA DALA'S E.I.R.L.
Diagramación de interiores: Carlos E. Iman Ancajima

© Editado y producido por la Pontificia Universidad Católica del Perú – Departamento de Ciencias, 2012.
Avenida Universitaria 1801, Lima 32
626 2000-anexo 4151
E-mail: irem@pucp.edu.pe
Dirección URL: http://www.pucp.edu.pe/irem/index.html

Derechos reservados, prohibida la reproducción de este libro por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso de los editores.

ISBN: **978-612-46343-4-5**
Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú: **2013-04071**

Producido en el Perú – Produced in Perú

Presentación

El Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP), en coordinación con la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP, viene organizando desde el 2002, encuentros internacionales a los que denomina Coloquios Internacionales sobre Enseñanza de las Matemáticas. Este año se llevó a cabo la sexta edición de estos encuentros académicos, con el título *Didáctica de las Matemáticas: Avances y desafíos actuales*. Su principal objetivo fue que los participantes amplíen sus conocimientos acerca de la Didáctica de las Matemáticas y la evolución que esta disciplina está teniendo en los últimos tiempos. Estuvo dirigido a profesores de universidades, de institutos superiores y de educación básica (secundaria y primaria). Se realizó los días 13, 14 y 15 de febrero en el campus de la PUCP y contó con la participación de reconocidos investigadores en Didáctica de la Matemática de Brasil, Colombia, Ecuador, Francia, México y Perú.

En este volumen, presentamos los extensos envíados por los expositores de conferencias plenarias, talleres, reportes de investigación, experiencias didácticas y pósteres. En los casos en los que no se envio el extenso, se ha optado por presentar el resumen de la actividad. Cada autor es responsable de haber realizado los cambios sugeridos por el Comité Científico y del contenido del extenso de su presentación.

El Comité Organizador del **VI Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas** agradece a los autores por sus valiosos aportes; a la Embajada de Francia y las autoridades de la Pontificia Universidad Católica del Perú por el gran apoyo brindado; a muchos colegas matemáticos; a los alumnos de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y en Matemáticas por su desprendida y eficiente dedicación; al personal administrativo del Departamento de Ciencias y de la Sección Matemáticas y a todos aquellos que hicieron que esta actividad fuera todo un éxito.

El Comité Organizador

Convocan

Instituto de Investigación para la Enseñanza de las Matemáticas (IREM) - Perú

Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Escuela de Posgrado de la PUCP

Auspicia:

Embajada de Francia
Facultad de Ciencias e Ingeniería de la PUCP

Comité Científico

Dra. Solange Hassan Ahmad Ali Fernandes (UNIBAN- Sao Paulo, Brasil)
Dra. Ivete Cevallos Soares (UNEMAT-Mato Grosso; Brasil)
Dra. Patricia Camarena (IPN, México)
Dr. Miguel R. Wilhelmi (Universidad Pública de Navarra, España)
Dra. Jesús Victoria Flores Salazar (PUCP, Perú)
Dr. Uldarico Malaspina (PUCP, Perú)

Comité Organizador

Uldarico Malaspina (Presidente)
Jesús Flores (Coordinadora general)
Elizabeth Advíncula
Elton Barrantes
Cecilia Gaita
Mariano González
Fabiola Jabo
Maritza Luna
Nélida Medina
Nancy Saravia
Francisco Ugarte

Contenido

CONFERENCIAS PLENARIAS

Funciones: un concepto fundamental para las matemáticas y su enseñanza (versión del resumen)
Michèle Artigue 17

Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica (versión del resumen)
Raymond Duval 19

Sistemas de ecuaciones ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje? (versión del resumen)
María Trigueros 23

Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula y para la investigación (versión del resumen porque la que envio está en pdf)
Walter F. Castro G 25

La influencia de la tecnología informática en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas (versión del resumen)
Jesús Victoria Flores Salazar 29

TALLERES

La enseñanza del cálculo y la aproximación al análisis
Michèle Artigue 33

Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica (versión del libro de resúmenes)
Raymond Duval 37

El papel de la variable en la enseñanza del Álgebra elemental
María Trigueros 41

Razonamiento algebraico en la escuela primaria: problemas y propuestas (versión del libro de resúmenes, envío una versión final en pdf)
Walter F. Castro G 53

Uso de la pizarra digital interactiva en la enseñanza de la matemática
Marisel Rocío Beteta Salas 55

Introducción de la probabilidad en la educación superior
Augusta Osorio Gonzales. 67

Haciendo Matemática con Mathematica (versión del libro de resúmenes)
Mariano González Ulloa 83

Técnicas de evaluación en matemática
Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Carolina Rita Reaño Paredes 85

Taller de resolución y elaboración de problemas no rutinarios de matemáticas (olimpiadas)
Emilio Gonzaga
Jorge Tipe
John Cuya 97

Las justificaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: experiencias con la divisibilidad
Estela Vallejo Vargas
Cristina La Plata de la Cruz 109

Discretizacion de regiones del plano (versión del libro de resúmenes)
Mariano González Ulloa
Roy Sánchez Gutiérrez 121

Aprendiendo cálculo de funciones reales con apoyo de derive 6.0 (versión del libro de resúmenes)
Nélida Medina García
Miguel Gonzaga Ramírez 123

Mathematica: pasando de las ideas a los resultados (versión del libro de resúmenes)
Mg. Luis Alberto Mayta Chua.
Mg. Alfredo Velásquez. 125

Lógica y Geometría dinámica: Su articulación para aprender a demostrar (versión del libro de resúmenes)
Carmen Samper
Patricia Perry
Óscar Molina
Armando Echeverry
Leonor Camargo 127

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

Uma análise semiótica do estudo da reta no espaço em Geometria Analítica
Cintia Rosa da Silva
Saddo Ag Almouloud 133

Un estudio, desde el enfoque lógico semiotico, de las dificultades de alumnos del tercer año de secundaria en relación a los polinomios
Ana Karina Delgado Bolivar
Elizabeth Milagro Advíncula Clemente 141

Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización
Myrian Luz Ricaldi Echevarria 149

Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre problemas de programación lineal, en estudiantes del quinto grado de educación secundaria (versión del libro de resúmenes)
Milton Santiago Matildo Olivos 159

Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años
Silvia Susana García Benavides 161

Concepções de professores da educação básica sobre variabilidade estatística (tenemos la version extensa pero en pdf)
Diva Valério Novaes
Cileda Q. S. Coutinho 171

Prototipos etnomatemáticos andinos y el aprendizaje de la matemática en la educación intercultural bilingüe – Puno (Solo se tiene una versión de dos páginas que debe ser la del libro de resúmenes)
Edgar Atamari Zapana 175

Resolución de problemas: un estudio sobre las ecuaciones lineales desde la teoría de registros de Duval
Luz Milagros Azañero Távara 177

Identificacion de las prácticas matemáticas de los profesores en ejercicio en relación a los conceptos de fracciones
Milagros Carrillo Yalán 185

Concepções e conhecimentos geométricos de um grupo de alunos do primeiro ano de um curso de Matemática (version del libro de resúmenes)
Karla Aparecida Lovis
Valdeni Soliani Franco 191

Resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas
Nixo Núñez Sánchez 195

Aplicações da sequência fedathi: sobre o ensino de pontos críticos e de inflexão no (version del libro de resúmenes)
Francisco Regis Vieira Alves
Hermínio Borges Neto
Katia Vigo Ingar 203

Levantamento bibliográfico: o caso da Matriz Hessiana de uma função real de várias variáveis
Katia Vigo Ingar
Maria José Ferreira Da Silva 207

Um olhar sobre objetos de aprendizagem como metodologia no ensino da matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica
Vera Lucia S. S. Gregorio
Nilson Sergio Peres Stahl 217

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

Musimática
Virginia Coronado
Irma Flores 231

La Geometría analítica en nuestro entorno
Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Edwin Villogas Hinostroza 235

La Geometría de la loza deportiva y el modelo de situaciones de actividades instrumentales
Magna Fernández Contreras
Roger Díaz Villegas
Candy Ordoñez Montañez 243

Comprendiendo la existencia de un triángulo usando geogebra como recurso didáctico
Maritza León Jordán
maritzaleonj@hotmail.com 249

La aplicación del modelo TPACK en la educación continua de los profesores de matemáticas de la Red Estatal de Rio de Janeiro (versión del libro de resúmenes)
Agnaldo da Conceição Esquincalha
Carlos Eduardo Bielschowsky
Gisela Maria da Fonseca Pinto
Elizabeth Ramalho Soares Bastos 259

Uso de las matemáticas en el contexto de las ciencias humanas y las ciencias de la comunicación
Maritza Luna Valenzuela 261

Uso de Wiris en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales
Daysi Julissa García Cuéllar
Daniel Giovanni Proleón Patricio 269

Herramientas matemáticas aplicadas a la publicidad y derecho
Nancy Edith Saravia Molina 275

Imagens de professores de matemática em charges e cartuns postados na internet
Luiz Henrique Ferraz Pereira
Maiara Zaparoli 287

Análisis de la idoneidad de un proceso de intrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior (versión del libro de resúmenes)
Augusta Osorio Gonzales 293

Relación entre uso de ambientes virtuales de aprendizaje y el rendimiento académico en los primeros cursos de matemáticas para ingeniería (versión del libro de resúmenes)
Luis Fernando Díaz Basurco 295

Introducción del concepto derivada: un estudio con estudiantes universitarios de humanidades
Juan Carlos Sandoval Peña
Jesús Victoria Flores Salazar 297

Formación de docentes de educación básica, utilizando técnicas del programa de filosofía para niños aplicado a las matemáticas
Diógenes Eduardo Molina Morán 305

Enseñanza de la función logarítmica por medio de una secuencia didáctica basada en sus representaciones con uso del software Geogebra
Zenón Eulogio Morales Martínez 313

Uso de recursos digitales en el bachillerato
Domingo Márquez Ortega 319

Una experiencia de aprendizaje basado en problemas en didáctica de la matemática
Martha Cecilia Mosquera Urrutia 321

Poliedros que vuelan
Roberto Antonio Salvador 329

PÓSTERES

Mosaicos con Geogebra, una manera didáctica de introducir el concepto de isometrías
Daysi Julissa García Cuéllar
Daniel Giovanni Proleón Patricio 335

Webquest como recurso de la enseñanza de la Matemática en los primeros ciclos de los cursos de ingeniería
Daniel Giovanni Proleón Patricio
Daysi Julissa García Cuéllar 343

Configuraciones geométricas en hojas de plantas
Elsa Cárdenas Catalán 351

Modelación mediante Excel y Fwin32: funciones polinómicas de grado 1-2-3
Enrique Huapaya Gómez 363

Analisando os obstáculos no ensino e na aprendizagem da geometria esférica (version del libro de resúmenes)
Maria Lauricea da S. Shimonishi
Roseli Nozaki G. Andrade
Valdeni Soliani Franco 371

Club de Matemáticas un lugar para la recreación y el aprendizaje (versión del libro de resúmenes)
Fredy Edinsson Cuéllar Aullon
Eison Víctor Andrés Calderón Muñoz 375

Enseñando Física usando las TIC
Delfín Rogelio Rocca Quispe
Maritza Ana Ccayahuallpa Huamanhorqque 377

Escher e o ensino de geometria em aulas de matemática
Luiz Henrique Ferraz Pereira 379

Utilizando a história da matemática para o ensino de matemática
Luiz Henrique Ferraz Pereira 385

Aplicación de matebloques en el aprendizaje del algebra (versión del libro de resúmenes)
Wilman Durán Tovar
Mayda Lorena Cuellar Cerón 391

Algunas características y potencialidades del sistema de numeración muisca (versión del libro de resúmenes)
Christian Camilo Fuentes Leal 393

Aprendiendo álgebra con fichas de colores (versión del libro de resúmenes)
Isabel Zoraida Torres Céspedes 397

Entraves e conquistas de professores no uso de tecnologia para ensino de matemática utilizando teoria hipotética da aprendizagem (version libro de resúmenes)
Luciane Santos Rosenbaum
Miguel Fortunato Athias
Célia Maria Carolino Pires
Agnaldo da Conceição Esquincalha 399

Isometrías en los diseños de los tejidos de telar de la comunidad rural Porcón, Cajamarca
Lucrecia Isabel Cieza Paredes 403

A transição ensino médio e superior: um estudo de caso para o desenvolvimento da noção de derivada no estado de São Paulo – Brasil (version del libro de resúmenes)
Lucia Helena Nobre Barros, Katia Vigo Ingar
Francisco Regis, Vieira Alves 411

Introducción a la programación lineal. Una mirada desde la teoría de situaciones didácticas
Carolina Rita Reaño Paredes 413

El modelo de Van Hiele como marco para el aprendizaje del concepto de parábola como lugar geométrico en alumnos de quinto de secundaria, con apoyo del software geogebra
Ruth Janeth Mechán Martínez 419

O uso da metáfora no ensino: o caso do cálculo a várias variáveis
Francisco Regis Vieira Alves
Katia Vigo Ingar
Lucia Helena Nobre Barros 425

Una propuesta didáctica para el concepto de límite de una función real en un primer curso de cálculo del nivel universitario
Cristina Sofía La Plata De la Cruz 431

Naipes, dominóes y curiosidades en la enseñanza de la matemática en educación primaria
César Fernando Solís Lavado 441

Elementos de referencia para la evaluacion en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas (versión de libro de resúmenes no puedo abrir el archivo que enviaron)
David Esteban Espinoza
Manuel Humberto Malca Montoya 445

Un aprendizaje razonado de la función cuadrática con el uso de software GCALC (versión del libro de resúmenes)
Olimpia Rosa Castro Mora 447

Proyecto de museo matemático: una muestra de experiencias y modelos
Zenón Eulogio Morales Martínez 451

Las representaciones semióticas: una estrategia didáctica en la enseñanza del álgebra
Zenón Eulogio Morales Martínez. 459

A aplicação da modelagem matemática no ensino médio a luz da teoria dos registros de representação semiótica.
Patricia Maria dos Santos
Nilson Sergio Peres Stahl 463

CONFERENCIAS PLENARIAS

Funciones: un concepto fundamental para las matemáticas y su enseñanza (versión del resumen)

Michèle Artigue
Universidad de París, Francia
michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Resumen

Al inicio del siglo veinte, el matemático Felix Klein, expresando una visión compartida en esta época por prominentes matemáticos, escribió:

"Nosotros, los llamados reformadores, queremos colocar el centro de la enseñanza en el concepto de función como concepto de la Matemática de los dos últimos siglos que desempeña el papel fundamental en cuantos sitios intervienen nociones matemáticas." (Klein, 1924, p.5)

Y Felix Klein se lamentaba al ver la manera en que se aproximaba a este concepto fundamental en las escuelas secundarias de su país. En esta ponencia, partiendo de la visión expresada por Felix Klein, trataré sobre la evolución de la enseñanza de este concepto desde el tiempo de Felix Klein, y sobre cómo se puede pensar su enseñanza hoy, tomando en cuenta la evolución de las matemáticas, la evolución tecnológica y el conocimiento didáctico sobre este tema construido en las últimas décadas.

Palabras clave: funciones, matemáticas, enseñanza, evolución histórica

Referencias

Artigue M. (2009). L'enseignement des fonctions à la transition lycée – université. In B. Grugeon (ed.), *Actes du XVe Colloque CORFEM 2008*, pp. 25-44. Université de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

Artigue M., Lagrange J.B. (2009). Students' activities about functions at upper secondary level: a grid for designing a digital environment and analysing uses. In, M. Tzekaki, M.

Kaldrimidou, H. Sakonidis (eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 465-472, vol. 3. Thessalonique: Aristotle University of Thessaloniki & University of Lacedonia.

Artigue, M. (to appear). Functions and Analysis: Elements of reflection within the perspective of the Felix Klein project. *Proceedings of the Conference Didactics of Mathematics as a Mathematical Discipline*, Madeira, October 2009.

Dubinsky, E, Harel, G. (1992). The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy. *MAA Notes* n°25. Mathematical Association of America.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik von hölteren Standpunkte aus. Aithmetik, Algebra, Analysis. Berlin*: Springer (Spanish translation: Roberto Araujo, Biblioteca Matematica, Director J. Rey Pastor, Matematica Elemental desde un punto de vista superior).

Tall D. (1996). Functions and Calculus. In, A.J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, pp. 298-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

❖❖❖

Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica (versión del resumen)

Raymond Duval
Universidad del Litoral - Francia
duval.ray@wanadoo.fr

Resumen

Como podemos apreciar al examinar los programas de los Congresos Internacionales sobre Educación Matemática, las matemáticas se enseñan desde los primeros años del colegio hasta la universidad. Y este hecho parece dar una aparente unidad a las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas, al menos, en lo concerniente a las teorías, métodos o tipos de actividades que se deben promover, tales como, por ejemplo, la resolución de problemas. En esta perspectiva, las diferencias entre los niveles de enseñanza se centran sólo en una presentación más o menos práctica, o más o menos teórica, y el tipo de exigencia que se espera en materia de pruebas.

Sin embargo, es esencial hacer una clara distinción entre las investigaciones sobre la enseñanza matemática impartida a todos los alumnos hasta la edad de 16 años y la enseñanza especializada limitada a poblaciones reducidas, según los programas seguidos después de los 16 años. La principal razón para ello es que hasta los 16 años la enseñanza está dirigida a alumnos que están en pleno crecimiento de su inteligencia y que primero deben desarrollar su autonomía intelectual. Después, la enseñanza de las matemáticas se especializará en función de pre orientaciones profesionales múltiples. Por lo tanto, en estas dos situaciones, no se presentan ni los mismos desafíos ni las mismas problemáticas de formación.

La enseñanza de las matemáticas confronta dificultades de comprensión y aprendizaje que no se encuentran en otras áreas de la enseñanza y ello plantea varias interrogantes. Dos de ellas son fundamentales para la investigación. La primera se refiere a la descomposición de los conocimientos matemáticos que se

fijan como objetivos globales de una educación matemática dirigida a todos los alumnos. Determina no solamente el contenido de los programas, sino también la organización de las situaciones de aprendizaje. ¿Esta descomposición debe hacerse solo bajo un punto de vista matemático o debe también tomarse en cuenta el punto de vista cognitivo? La segunda interrogante se refiere a qué es comprender en matemáticas. Los criterios de comprensión no son los mismos desde puntos de vista matemáticos, cognitivo ni "pedagógico". ¿Será suficiente, entonces, limitarse sólo a los criterios matemáticos para evaluar la comprensión de los alumnos?

Para responder a estas interrogantes, mostraremos la necesidad de tomar en cuenta los puntos de vista cognitivo y matemático a la vez, sin subordinar el primero al segundo, debido a que las dificultades de comprensión que bloquean a la gran mayoría de alumnos, provienen de la paradoja cognitiva de las matemáticas. A diferencia de las otras ciencias, el acceso al objeto de estudio es exclusivamente semiótico y toda actividad matemática consiste en la transformación de representaciones semióticas, ya sea que se trate de exploración, razonamiento o visualización. Por el contrario, querer limitarse a un solo punto de vista matemático porque de otro modo ya no se haría matemáticas con los alumnos, conduciría a un enfoque unilateral de la actividad matemática. Se privilegiarían los contenidos que se deben introducir sucesivamente como objetivo local de adquisición, es decir, la cara expuesta de las matemáticas y se olvidaría su cara oculta, es decir, los gestos intelectuales que dan lugar a la manera matemática de trabajar. Ahora bien, estos gestos intelectuales no son solamente independientes de los contenidos sino que dominarlos es la condición necesaria para la adquisición de conocimientos matemáticos.

La necesidad de aplicar este doble enfoque, matemático y cognitivo, es crucial en los siguientes puntos: el análisis de las actividades que se da a los alumnos y que frecuentemente abarcan un complejo de tareas cognitivas heterogéneas, la resolución de problemas que a menudo queda como una caja negra para los alumnos, la interpretación de las producciones de

los alumnos, la ilusión de las teorías del conocimiento importadas de otros campos disciplinarios, y la utilización de los ambientes informáticos.

Lo que está en juego en la enseñanza de las matemáticas para todos está en el desarrollo de la autonomía intelectual de los alumnos. Bajo esta perspectiva, es que las matemáticas pueden aportar una gran contribución a la formación general de los alumnos y pueden despertar en ellos un gran interés y utilidad.

Referencias

Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano* Universidad del Valle (314 pages) traduction espagnol de l'ouvrage paru en français en 1995.

Duval, R. (2004) *Los problemas fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas superiores en el Desarrollo cognitivo*. Cali: Universidad del Valle. 121 p.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n° 10, 5-53.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, (Madrid). Vol.9. 9.1 pp.143-168

Duval R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. In a A Saenz-Ludlow, and N.Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics,* Sépcial issue, Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical processes od proof. In (Ed. P. Boero) *Theorems in schools*, 137-161. Rotterdam/Tapei: Sense

Duval R. (2008). Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics Education. In (Eds. L. Radford, G. Schubring, F. Seeger) *Semiotics in Mathematics Education; Epistemology, History, Classroom and Culture*, 39-61. Sense Publishers.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. (I) Entrar no modo matemacico de pensar: os registros de representatcoes semioticas*. Sao Paolo: Proemeidtora.

❖❖❖

Sistemas de ecuaciones ¿Qué nos dice la investigación sobre su aprendizaje? (versión del resumen)

María Trigueros
Dpto. de Matemáticas ITAM
trigue@itam.mx

Resumen

Es un hecho conocido por los profesores de matemáticas que los alumnos de secundaria y bachillerato enfrentan muchas dificultades al resolver sistemas de ecuaciones. En particular, los estudiantes suelen memorizar estrategias de solución de sistemas pero no comprenden su significado ni el del conjunto solución del sistema. En esta conferencia analizaremos lo que desde el punto de vista de la teoría APOE (Acción, proceso, objeto, esquema) se requiere para que los estudiantes comprendan con mayor profundidad el significado de los sistemas de ecuaciones, las bases de los procedimientos de solución y el significado del conjunto solución de los mismos.

Se discutirán asimismo los resultados que se han obtenido en investigaciones que utilizan el modelo 3UV (Tres usos de la variable) o la teoría APOE (Acción, proceso, objeto, esquema) como marco teórico. Estos resultados indican, por una parte, las dificultades de los estudiantes con el concepto de variable en el contexto de los sistemas de ecuaciones, y por otra, las posibles construcciones que llevan o no a cabo después de varios cursos de Algebra Elemental.

Con base en las conclusiones de estas y otras investigaciones, además de investigaciones relacionadas con el uso de modelación, se diseñó una estrategia de enseñanza con el fin de favorecer una mejor construcción del concepto de sistema de ecuaciones y del concepto de conjunto solución. Se mostrarán también los resultados de la investigación sobre la puesta en marcha de esta propuesta, que son alentadores.

Referencias

Cutz, B. (2005) *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

De Vries, D y Arnon Ilana (2004). Solution- What does it mean? Helping Linear Algebra Students Develop the Concept While Improving Research Tools. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, 55-62.

Mora, B. (2001). *Los modos de pensamiento en la interpretación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Tesis de maestría, CINVESTAV_IPN, México.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 7(2), 49-78.

Trigueros, M., Oktaç, A., Manzanero, L. (2007) Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME (Congress of the European Society for Research in Mathematics Education)*, Larnaca, Chipre.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, & Lozano, M.D. (2009) *Use of models in the teaching of linear algebra, Linear Algebra and its Applications*. 432 (8) 2125–2140.

❖❖❖

Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula y para la investigación (versión del resumen porque la que envio está en pdf)

Walter F. Castro G
Universidad de Antioquia, Colombia
wfcastro82@gmail.com

Resumen

Se aborda el problema de la enseñanza del álgebra en la escuela primaria. Se proponen algunas condiciones para su implantación, se discuten algunas tareas de razonamiento algebraico elemental que pueden ser implantadas en el aula, se presentan características algebraicas de tales tareas. Finalmente se proponen algunos problemas de investigación.

Pertinencia del tema. El álgebra ha sido considerada como un "guardián" que impide el acceso de los estudiantes a niveles superiores de estudio y reflexión en matemáticas. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada "algebra for all", en la que sugiere tomar acción para promover al álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas en lugar de ser inhibidora.

Para lograr que la formación en álgebra alcance a una población mayor, algunos autores han propuesto incluir el razonamiento algebraico desde los niveles inferiores de la educación primaria (Vergnaud, 1988); esta inclusión ha sido denominada "la algebrización" del currículo (Kaput, 2000). En tanto que el álgebra está relacionada con una mejor comprensión de la aritmética, con la geometría, el análisis y otros temas matemáticos, parece que no hay duda que una buena experiencia temprana con el álgebra podría servir para mejorar la formación matemática de los niños. Sin embargo, se puede formular la pregunta ¿necesitan todos los niños estudiar álgebra?, Steen (1992) ofrece argumentos que apoyan una respuesta afirmativa a la pregunta.

Cuerpo de la presentación. Se plantearán algunas "vías de ingreso" al razonamiento algebraico elemental y se discutirán tanto tareas matemáticas elementales como sus características algebraicas. La presentación toma en consideración las investigaciones realizadas en los últimos años sobre los problemas que se deben afrontan cuanto se quiere introducir el Razonamiento Algebraico Elemental (RAE).

Problemas de investigación. La investigación sobre la introducción del razonamiento algebraico elemental aborda diversos campos: profesores y alumnos. Las dificultades que los maestros en formación exhiben para identificar y promover el razonamiento algebraico de los niños han sido motivo de investigación (Van Dooren, Verschaffel y Onghema, 2003). El segundo campo centra su atención en los alumnos y el tipo de tareas que pueden resolver. Esto a su vez permite proponer vías de entrada al "álgebra" en el ámbito de la escuela elemental.

Palabras clave: Razonamiento Algebraico Elemental, análisis epistémico, álgebra elemental, currículo, naturaleza algebraica.

Referencias

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: *National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA.

Steen, L.A (1992). Does everybody need to study algebra? *The Mathematics Teacher*, Vol. 85, 4, 258-260.

Van Dooren W., Verschaffel L., Onghema P. (2003): Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 27-52.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. Artículo presentado en las *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des*

matematiques et de l' informatique, 189-199, Paris: La Pensée Sauvage.

❖❖❖

La influencia de la tecnología informática en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas (versión del resumen)

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

La tecnología, de manera general, según Lévy (2002), comprende tres polos: la oralidad, la escrita y la informática, en esa perspectiva la presente conferencia presenta el tercer polo: la tecnología informática. De acuerdo con algunas investigaciones como las de Borba y Villarreal (2005), Bittar (2000), Brandao (2005) y Salazar (2009) se han alcanzado resultados importantes en el proceso de enseñanaza y aprendizaje de las matemáticas cuando se utilizan diferentes software de matemática, específicamente ambientes de geometría dinámica como el Cabri II, Cabri 3D y GeoGebra, ya que su uso adecuado permite una mejor comprensión del funcionamiento cognitivo y favorece el desarrollo autónomo del estudiante. Sin embargo, se observa que muchos profesores aún no han integrado la tecnología informática de manera efectiva en sus clases. Es así, que la conferencia tiene por objetivo reflexionar desde el punto de vista de la Educación Matemática, la influencia del uso de la tecnología informática en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. Para hacer esta reflexión nos valemos del abordaje instrumental de Rabardel (1995). También resaltamos que el uso adecuado de la tecnología informática, depende en gran medida del tratamiento que se le dé al objeto matemático de estudio, a los recursos disponibles y a los conocimientos, tanto de los profesores como de los estudiantes. Además de otros aspectos como el tiempo y las condiciones disponibles para el desarrollo de la clase.

Palabras clave: Tecnología informática, formación de profesores, geometría dinámica, educación matemática.

Referencias

Borba, M. C. y Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Bittar, M. (2000). Informática na Educação e Formação de Professor no Brasil. En: *Anais do 1º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Serra Negra, São Paulo: SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v. único. p. 224 – 230.

Brandão, P. C. R. (2005). *O uso de software educacional na formação inicial do professor de Matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em Matemática do Estado de Mato Grosso do Sul*. Tesis (Maestria en Educación Matemática), Universidad Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil.

Lévy P. (2010). Les Technologies de l'intelligence. *L'avenir de la pensée à l'ère informatique*, Paris: La Découverte.

Rabardel, P. (1995).*Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin, p.239.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. Tesis (Doctorado en Educación Matemática), Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

❖❖❖

TALLERES

La enseñanza del cálculo y la aproximación al análisis

Michèle Artigue
Universidad de París, Francia
michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Resumen

En este taller, se propone desarrollar una reflexión sobre la enseñanza del cálculo y la aproximación al análisis, apoyándose sobre el estudio de unas situaciones elaboradas por la investigación didáctica para introducir y trabajar ideas fundamentales en este campo tal como la idea de linealidad local. Empezaremos con el análisis de unas situaciones históricas de determinación de tangentes a una curva o de optimización, al origen del cálculo diferencial. Luego, mostraremos cómo la evolución tecnológica permite hoy aproximar este tipo de problemas con los alumnos, combinando trabajo experimental y reflexión más teórica.

Palabras clave: cálculo, análisis, tangente a una curva, linealidad local

Introducción

La posibilidad de aproximar localmente una función por una función afín es una idea fundamental en Análisis. Se encuentran sus raíces en la historia de las matemáticas, incluso antes del nacimiento oficial del cálculo diferencial e integral en las obras de Leibniz y Newton. En este taller, vamos a revisitar esta idea, partiendo de un texto histórico donde Fermat presenta su método de "adigualación" y considerando luego lo que nos ofrece la tecnología hoy para familiarizar a los alumnos con esta idea fundamental y trabajarla.

I. El método de adigualación

Uso del método para determinar máximos y mínimos a través de un ejemplo:

Dividir el segmento AC *(fig 91-Fermat) mediante el punto* E *de tal manera que* AE×EC *sea máximo.*

Denotemos AC=*b*; sea *a* uno de los segmentos, el otro será *b-a*, y el producto cuyo máximo se debe encontrar: $ba-a^2$. *Sea* ahora *a+e* el primer segmento de *b*, el secundo será *b-a-e*, y el producto de los dos segmentos: $ba-a^2+be-2ae-e^2$;
Se debe adigualar al precedente: $ba-a^2$;
Quitando los términos comunes: $be \sim 2ae+e^2$;
Dividiendo todos los términos por *e*: $b \sim 2a+e$;
Quitando *e*: $b = 2a$;

Para resolver el problema, se debe pues tomar la mitad de *b*. No es posible dar un método más general.

Adaptación del método para determinar tangentes

Sea dada por ejemplo la parábola BON (fig. 92) de vértice D y de diámetro (eje de simetría) DC; sea dado sobre ella el punto B por el cual se debe trazar la línea BE tangente a la parábola y encontrando el diámetro en E.

Si se toma sobre la línea BE un punto cualquier O a partir del cual se traza la ordenada OI, y también la ordenada BC del punto B, tendremos:
$\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, porque el punto O es exterior a la parábola.

Pero $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, por causa de similitud entre los triángulos. Pues $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Notamos CD=*d* (dado). Notamos CE=*a* y CI=*e*, tendremos: $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$

Hacemos el producto de los medios y de los extremos: $da^2+de^2-2dae > da^2-a^2e$.

Adigualemos pues, usando el método precedente; tendremos, quitando los terminos comunes:

$de^2-2dae \sim -a^2e$, o, igualmente: $de^2+a^2e \sim 2dae$

Dividimos todos los términos por *e: de+a² ~ 2da*

Quitando *de*: queda *a² = 2da*, y entonces: *a = 2d*. Demostramos así que CE es el doble de CD, lo que está conforme a la verdad.

Este método nunca se equivoca, y se puede extender a muchas cuestiones muy hermosas.

Pregunta: ¿Cómo se expresa la idea de aproximación local en el método de adigualación de Fermat y qué relación se puede encontrar con los métodos actuales?

II. Aportaciones de la tecnología: visualizar la linealidad local

Hoy día, la tecnología ofrece diferentes recursos para familiarizarse con la noción de linealidad local y trabajarla. En esta segunda parte del taller, vamos a ilustrar una de estas múltiples aportaciones: la posibilidad de visualizar la idea de linealidad local y de introducir la idea de tangente a través de un proceso de modelación matemática, utilizando una calculadora grafica o un programa como Geogebra.

1) Entrar en la calculadora o el programa sucesivamente la funciones siguientes y explorar lo que ocurre cuando se hace zooms sucesivos alrededor del punto $(0, f_i(0))$ para cada una de ellas:

$$f_{1(x)} = x^2 - 1, \qquad f_{2(x)} = x^3 - \frac{2x}{3} + 1,$$
$$f_{3(x)} = abs(x) + 1, \qquad f_{4(x)} = x \sin\frac{1}{x}$$

2) Para la funcion f_2, cuando les parezca que han obtenido una visualización lineal, utilizar la opción "Traza" para obtener las coordenadas de un punto de la representación gráfica distinto del punto (0,1) y calcular la ecuación de la recta que aparece en la pantalla. Comparar las diferentes ecuaciones que se obtienen entre los diferentes participantes e interpretar matemáticamente el fenómeno.

III. ¿Por qué los físicos y las calculadoras utilizan la derivada simétrica?

En la tercera parte de este taller, vamos a investigar otra faceta de la aproximación lineal. Para calcular aproximadamente derivadas, los físicos y las calculadoras no utilizan la derivada sino la derivada simétrica que se define como el límite del cociente: $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ cuando h tiende hacia 0, explorando las relaciones entre derivada y derivada simétrica y las aproximaciones que permiten, primero para funciones polinómicas y luego de modo más general.

Referencias

Álvarez Manilla, J. M., Valdés Krieg, E. & Curiel de Valdés, A. B. (2006). Inteligencia emocional y desempeño escolar. *Revista Panamericana de Pedagogía*, 9, 9-33.

Artigue M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18/2, 231-262.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. *Actes du Colloque IREM – INRP « Histoire et Enseignement des Mathématiques : rigueur, erreurs, raisonnements* », Clermont-Ferrand, mai 2006. IREM de Clermont-Ferrand.

Maschietto, M. (2003). *L'enseignement de l'analyse au lycée: les débuts du jeu local/global dans l'environnement de calculatrices*. Thèse de Doctorat. Université Paris 7. Paris: IREM Paris 7.

Tall D. (1996). Functions and Calculus. In, A.J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Research in Mathematics Education*, pp. 298-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

❖❖❖

Lo esencial de los procesos cognitivos de comprensión en matemáticas: los registros de representación semiótica (versión del libro de resúmenes)

Raymond Duval
Universidad del Litoral - Francia
duval.ray@wanadoo.fr

Resumen

La actividad matemática suscita en muchos alumnos dificultades de aprendizaje que no se encuentran en otras actividades del conocimiento. Esta situación particular que tiene la enseñanza de las matemáticas obliga a interrogarse sobre los procesos cognitivos que subyacen en la comprensión de las matemáticas. ¿Estos procesos son fundamentalmente los mismos que aquellos que se movilizan en los otros tipos de conocimiento como generalmente se supone en los modelos que se refieren a Piaget, Vygotsky, Pierce para describir los procesos de adquisición o de formación del conocimiento? O, todo lo contrario, ¿será que la actividad matemática requiere de un modo específico de funcionamiento cognitivo del cual los alumnos deben tomar conciencia para poder comprender cómo se trabaja en matemáticas y, por lo tanto, adquirir conocimientos matemáticos? Si la respuesta es afirmativa, entonces se plantea la pregunta: ¿cómo describir este funcionamiento y cómo tomarlo en cuenta para el análisis y la organización de actividades que se proponen a los alumnos?

Ahora bien, tanto desde un punto de vista epistemológico, como desde un punto de vista cognitivo, las diferencias que separan las matemáticas de otros campos del conocimiento provienen del modo de acceso a los objetos estudiados. El acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente por medio de la producción de representaciones semióticas, y no por la percepción o la utilización de instrumentos como ocurre en las otras ciencias. El rol central que juegan las representaciones semióticas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos modifica

completamente el funcionamiento cognitivo que se requiere para comprender en matemáticas.

En la primera sesión pondremos de manifiesto la complejidad cognitiva propia de las matemáticas, a partir de ejemplos simples. Esta aparece con las tres condiciones que las representaciones deben cumplir para construir la relación cognitiva de acceso a los objetos estudiados, y son: la discriminación del contenido por el cual una representación representa un objeto, la existencia de una multiplicidad de representaciones posibles para un mismo objeto, y la necesidad de no confundirlas con lo que ellas representan. Estas tres condiciones se cumplen casi espontáneamente cuando hay un acceso perceptivo o instrumental a los objetos estudiados, y dejan de cumplirse cuando el acceso depende de la producción de representaciones semióticas.

A continuación, mostraremos por qué todas las representaciones ya sean semióticas o no, mentales o materiales, deben ser analizadas a partir de los sistemas que permiten producirlas y no en función del objeto que ellas representan. Esto nos permitirá inferir tres ideas clave para describir el modo de funcionamiento cognitivo que caracteriza al pensamiento matemático. (1) Los registros son los sistemas productores de representaciones semióticas. (2) La comprensión en matemáticas moviliza siempre implícita o explícitamente al menos dos registros; dicho de otra manera, la comprensión en matemáticas requiere la coordinación y el funcionamiento en sinergia de varios registros. (3) Cada registro abre un campo de transformación de las representaciones, y por lo tanto, posibilidades de tratamiento matemático que le son propias.

Finalmente, evocaremos rápidamente el problema de las representaciones llamadas « mentales » y de su relación con las representaciones semióticas que son generalmente consideradas (erróneamente) como representaciones externas que cumplen principalmente una función de comunicación.

En la segunda sesión mostraremos por qué los registros constituyen el instrumento necesario para organizar o analizar

las actividades matemáticas que se proponen a los alumnos en una perspectiva de adquisición de conocimientos.

Para ello, primero, presentaremos los dos principios de base para el análisis cognitivo de las actividades matemáticas:

- El análisis debe centrarse en las transformaciones de representaciones y no en las representaciones semióticas utilizadas. Ellas constituyen los fenómenos observables significativos de la actividad matemática.
- Los registros permiten distinguir dos tipos de transformaciones radicalmente diferentes: las conversiones y los tratamientos.

Mostraremos en base a un ejemplo que toda actividad matemática moviliza necesariamente estos dos tipos de transformaciones semióticas.

Luego, centraremos nuestra atención en las conversiones de representaciones para mostrar su complejidad cognitiva. Pondremos de manifiesto tres factores de variación cognitiva que se pueden verificar experimentalmente. Esos factores son esenciales ya que constituyen variables independientes para la investigación e, igualmente, variables didácticas para el docente en la elaboración de secuencias de actividades o la fabricación de problemas. Lograr la espontaneidad de la conversión de representaciones constituye para el alumno, el primer nivel de comprensión. Además, constituye el indicador más seguro de reconocimiento de los objetos matemáticos representados, independientemente del registro de representación elegido.

Por último, sólo podremos evocar las transformaciones de representaciones intrínsecas de cada registro. Estos son, evidentemente, los más importantes desde el punto de vista matemático. Cada uno da lugar a un análisis cognitivo propio. Y aquí, los factores cognitivos son obviamente específicos a cada uno de los registros. No son los mismos para los registros de visualización geométrica o de visualización gráfica o para el razonamiento en lengua natural. La toma de conciencia, por

parte de los alumnos, de estos funcionamientos específicos constituye niveles diferentes de comprensión.

Finalmente, enfatizaremos en la importancia de la coordinación de registros de representación semiótica en una educación matemática de base ya que, a diferencia de otras áreas del conocimiento, es la condición necesaria para la conceptualización.

❖❖❖

El papel de la variable en la enseñanza del Álgebra elemental

María Trigueros
Depto. de Matemáticas ITAM
trigue@itam.mx

Resumen

Los resultados de numerosas investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas muestran que la comprensión del concepto de variable es fundamental en el aprendizaje del álgebra elemental y en su uso posterior cuando se enfrentan problemas reales o cuando se estudian matemáticas avanzadas.
Existe hoy en día un cuerpo grande de investigación acerca del papel que juega la variable en el álgebra. Con el fin de comprender mejor la forma en que se aprende el álgebra y las dificultades que se presentan se desarrolló el modelo 3UV, que ha demostrado ser útil como marco conceptual para analizar el trabajo de los estudiantes y diagnosticar sus dificultades, así como para diseñar actividades de enseñanza y de evaluación. Diversos ejemplos ilustran la forma en que este modelo se utiliza en la investigación y cómo puede ser empleado para la docencia.
En este artículo se presenta modelo 3UV y se muestran ejemplos de su uso en el análisis de algunos problemas y en el diseño de actividades de enseñanza y de diagnóstico o evaluación que pueden ser de utilidad para analizar el trabajo de los estudiantes en la práctica cotidiana de los profesores de Álgebra.

Palabras clave: Variable, Álgebra elemental, modelo 3UV, incógnita, variación, número general.

Introducción

¿Ha considerado alguna vez que lo que los matemáticos denominan "variable" no es un concepto bien definido? ¿Ha considerado que el término variable puede tener significados diferentes en distintos contextos? Efectivamente, la variable no cuenta con una definición matemática precisa; es un término que cubre una variedad de usos de las letras en expresiones, en

ecuaciones y en relaciones funcionales. Como resultado de ello, los estudiantes tienen poca claridad de los distintos usos de las letras en matemáticas.

¿Ha considerado alguna vez que lo que los matemáticos denominan "variable" no es un concepto bien definido? ¿Ha considerado que el término variable puede tener significados diferentes en distintos contextos?

Considere el siguiente problema (Trigueros y Jacobs, 2008):

Laura entrenó para una carrera de bicicletas subiendo y bajando una colina cercana a su casa. Calculó que cada vez que subía la colina su velocidad promedio era de 8 Km/h y que podía bajar a una velocidad promedio de 17Km/h, saliendo y llegando al mismo punto. Un día subió y bajo la colina repetidas veces por dos y media horas ¿Cuánto tiempo le llevó subir la colina cada vez? ¿Cuál fue la distancia total que recorrió?

Considere ahora la solución y el análisis de lo que sucede con la variable en ese proceso:

La solución de la primera parte del problema requiere dividir la distancia recorrida por Laura en dos partes: la subida a la colina y la bajada de la misma. Es necesario considerar el tiempo que le llevó a Laura subir la colina como un número general. Es decir, el tiempo se puede representar con una letra, digamos t, que puede tomar cualquier valor en un conjunto y sobre el cual podemos operar.

El tiempo de bajada se puede simbolizar como T-t, en donde T es otro número general. Para encontrar la distancia total que recorrió, es necesario considerar que la distancia que abarca la subida a la colina es la misma que la de la bajada, pues Laura salió y llegó al mismo punto. Como sabemos que la distancia recorrida es propocional al tiempo de viaje y que la constante de proporcionalidad es la velocidad promedio, es necesario introducir una relación funcional entre la distancia recorrida en cada parte del viaje y el tiempo empleado en cada una de ellas: $v_1 t = d_1$ y $v_2 (T - t) = d_2$. Hay que notar en las relaciones anteriores que el papel que juega t puede considerarse como el

de la variable independiente en la función, mientras que d_1 y d_2 son las variables dependientes, y que v_1, v_2 y T son parámetros.

Usamos las dos relaciones que tenemos para encontrar una nueva relación funcional $v_1t + v_2 (T - t) = d_1 + d_2$. Dado que los valores de los parámetros están dados y considerando que $d_1 = d_2$ resulta en la ecuación $8t = 17(2.5 - t)$, en la que el símbolo t es ahora una incógnita que debe determinarse. Una vez que se obtiene el valor de t, es necesario regresar a la función que relaciona el tiempo y la distancia, sustituir el valor de t y resolver una nueva ecuación en la que d_1 es la incógnita. La distancia total se puede calcular entonces multiplicando la distancia de subida por 2.

¿Ha notado como los símbolos que aparecen a lo largo del problema cambian de significado en distintos momentos del proceso de solución? Inicialmente t y T se usaron como números generales, después t se convirtió en una variable independiente de una relación funcional y en ella las variables dependientes eran d_1 y d_2. Al mismo tiempo T cambió de ser un número general a un parámetro. Hacia el fin del proceso el papel de t y de d_1 cambió pues pasaron de ser las variables en una relación a ser incógnitas de las respectivas ecuaciones.

Este ejemplo nos muestra que, efectivamente, la variable no cuenta con una definición matemática precisa; es un término que cubre una variedad de usos de las letras en expresiones y en ecuaciones. Como resultado de ello, los estudiantes tienen muy poca claridad de los distintos usos de las letras en matemáticas.

El desarrollo del conocimiento algebraico y de otras áreas de las matemáticas, de nivel elemental a nivel avanzado, requiere de una sólida comprensión del concepto de variable. La literatura en Educación Matemática ha señalado que la variable presenta distintas facetas dependiendo de su papel en un problema específico y que esto hace que la variable sea un concepto versátil e importante de estudiar, pero que esa misma versatilidad hace al concepto muy difícil para los alumnos.

Muchos estudios en los últimos treinta años señalan que cada uso de la variable está ligado a obstáculos epistemológicos y

didácticos específicos (Kieran, 1984; Filloy & Rojano, 1989; Chevalard, 1989; Bednarz & Dufour-Janvier, 1991; Herscovics & Linchevski, 1991; English & Sharry, 1996; Bolea et al., 1998, en Ursini & Trigueros 2011). Se ha mostrado también que cuando se centra la atención en uno de sus usos, la posibilidad de moverse flexiblemente entre los diferentes usos en los que la variable aparece y la riqueza de las relaciones entre ellos se pierden; por ende, la comprensión de los alumnos queda muy limitada (Trigueros & Ursini, 2003). Dado el carácter multifacético de la variable, sus diferentes usos concurren en un mismo problema o situación y, por ello, el concepto de variable debe estudiarse como una entidad global. Además, el desarrollo de la capacidad de pasar flexiblemente entre sus distintas facetas es indispensable para lograr una comprensión profunda del álgebra y de las matemáticas en general.

La investigación ha mostrado que una comprensión competente del álgebra implica distintas capacidades además de la comprensión del uso de la variable. Entre ellas, por ejemplo, el conocimiento de los parámetros (Bloedy-Vinner, 1994, 2001; Furinghetti & Paola, 1994, en Ursini & Trigueros 2011) y la solución de problemas complejos que requieren el desarrollo de lo que se ha llamado "sentido de estructura" (Hoch and Dreyfus, 2004, en Ursini & Trigueros, 2011). Todo esto es cierto, pero es importante considerar que esas capacidades implican una buena comprensión de la variable, que incluye la comprensión de los parámetros.

Si bien las investigaciones señalaban desde hace tiempo la importancia del paso flexible entre diferentes usos de la variable en el aprendizaje del álgebra, no se había desarrollado una herramienta teórica o metodológica que permitiera identificar de forma precisa las dificultades de los estudiantes cuando trabajan con la variable y las formas de abordar estas dificultades en la enseñanza. Trigueros y Ursini abordaron este problema y diseñaron, con base en un análisis minucioso de aquellos aspectos involucrados en el uso de las variables, una herramienta conceptual, el modelo 3UV (tres usos de la variable) que ha resultado útil en el análisis de los usos de la variable en

problemas algebraicos de diferente complejidad y en la identificación y explicación de las dificultades de los alumnos en diferentes niveles escolares. Además de presentar a continuación el modelo 3UV, se ejemplifica su uso y se discute su papel en la posibilidad de que los alumnos desarrollen el sentido de estructura algebraica. El objetivo de este trabajo es introducir a los maestros en el uso de esta herramienta que puede ser de utilidad en la enseñanza del álgebra.

El modelo 3UV

Para investigar la comprensión de los estudiantes del concepto de variable Urisni y Trigueros llevaron a cabo un análisis detallado del concepto en el que se subrayaron sus diferentes usos y las características de estos. Este análisis se basó en una revision histórica del desarrollo del concepto de variable, en la experiencia de las autoras como maestras y en su propia comprensión del concepto y las capacidades necesarias para comprenderlo.

En el Modelo 3UV (3 Usos de la Variable) (Trigueros & Ursini, 2003) se enumeran para cada uno de los usos de la variable que comúnmente aparecen en los cursos de álgebra elemental: incógnita, número general, variables en relación funcional, así como aquellos aspectos que resultan imprescindibles para que un usuario del álgebra sea capaz de enfrentar y poder resolver problemas y ejercicios. Estos aspectos, que corresponden a distintos niveles de abstracción, se presentan a continuación de manera sintética:

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran la **incógnita** es necesario:

I1) Reconocer e identificar en una situación problemática la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2) Interpretar los símbolos que aparecen en una ecuación como la representación de valores específicos.
I3) Sustituir la variable por el valor o los valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

I4) Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas realizando las operaciones algebraicas y/o aritméticas.
I5) Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran el **número general** es necesario:

G1) Reconocer patrones, percibir reglas y métodos en secuencias y en familias de problemas.
G2) Interpretar un símbolo como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3) Deducir reglas y métodos generales en secuencias y familias de problemas.
G4) Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5) Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Para trabajar exitosamente con problemas y ejercicios que involucran variables en **relación funcional** es necesario:

F1) Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2) Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3) Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4) Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, gráficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F5) Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6) Simbolizar una relación funcional, basados en el análisis de los datos de un problema.

Si bien los aspectos F2 y F3 implican el aspecto I4 (determinación del valor de la incógnita), no son equivalentes, dado que para determinar los valores de una variable en función

de los valores de la otra, es necesario primero sustituir un valor en una de las variables y convertir de este modo una expresión que involucra una relación funcional en una ecuación.

La solución de los problemas algebraicos requiere de un manejo flexible de estos tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan cada uno de ellos.

La investigación ha puesto menos antención en el trabajo de los estudiantes con los parámetros. Si bien Bloedy-Vinner (1994, 2001) y Furinghetti y Paola (1994) señalan que los parámetros se pueden considerar como "otro uso de la letra", Ursini y Trigueros (2004) consideran que los parámetros se describen de mejor manera como números generales dado se utilizan para generalizar expresiones, ecuaciones o relaciones funcionales; así que pueden considerarse números generales de segundo orden, en el sentido de que permiten generalizar algo que, de por sí es ya general. Cuando los parámetros se presentan en expresiones algebraicas su papel depende del contexto y puede cambiar a lo largo de la solución de un problema, al igual que el papel de la variable. Por esta razón, en el modelo 3UV no se hace una distinción explícita entre los usos de la variable y de los parámetros, pero, al igual que otros autores, se considera que es de gran importancia trabajar explícitamente con ellos.

Utilidad del modelo 3UV

En cualquier situación algebraica, aún en la más sencilla, las variables están involucradas (Ursini & Trigueros, 2011). El modelo 3UV es una herramienta teórica que permite analizar problemas, independientemente de su nivel de dificultad. Al usarlo se subrayan los diferentes aspectos y facetas de las variables que aparecen en distintas etapas de la solución.

Considere los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1:

Un agricultor vende tomates a $12.00 el kilogramo y sus costos para recoger la cosecha y transportar los tomates al mercado son de $240.00. Encuentre una relación entre la utilidad del

agricultor y el número de kilogramos de tomate vendidos. ¿Cuántos kilogramos de tomate debe vender para lograr una utilidad de $4500.00?

Análisis con el modelo

La solución de este problema require la identificación de una relación funcional entre el número de kilogramos de tomate vendidos y la utilidad, considerando los costos de la cosecha y el transporte (F1, F4). El análisis de esta situación debe conducir a la simbolización de una relación funcional (F6). Una vez simbolizado el problema, es necesario sustituir los datos conocidos (F3) para obtener una ecuación en la que una de las variables debe interpretarse como incógnita (I1) y manipularse como número general (G4) para encontrar su valor (I4). Este problema puede resolverse también utilizando una estrategia gráfica en la que se presentan los mismos usos de la variable.

Con el modelo 3UV es posible apreciar cuáles de las facetas de la variable aparecen en las estrategias de los alumnos; ello hace posible diagnosticar sus dificultades y precisar lo que cada uno requiere para desarrollar una mejor comprensión. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2:

Escribe una fórmula que represente lo siguiente: Un número desconocido dividido entre 5 y el resultado sumado a 7.

Resultados

Alrededor del 68% de los alumnos en cada grupo en el que se ha usado esta pregunta responden incorrectamente. La respuesta más común invariablemente es *x/5=y+7.* ¿Qué implica esta respuesta?

En esta pregunta los alumnos deben reconocer dos números generales (G2) y simbolizar el enunciado (G5). La respuesta de los alumnos pone de manifiesto su dificultad para interpretar enunciados y símbolos como números generales. Muestra la debilidad de los alumnos frente a este uso de la variable pues

aun cuando los estudiantes pueden manipular y simbolizar expresiones muy simples, como es el caso de *x/5* con el cual no tuvieron problemas, su respuesta muestra que enfrentan dificultades cuando la expresión es un poco más complicada. Los estudiantes en este problema no pudieron considerar a la expresión *x/5* como un nuevo objeto matemático sobre el cual se debía operar para producir una nueva expresión, *x/5 + 7*. La mayoría identificó a *x/5* con un objeto al que tuvieron la necesidad de identificar con otro símbolo *y* (*x/5= y*) para considerarlo como tal y poder operar con él. Sin embargo, después de reemplazar *x/5* con una nueva variable no consideraron necesario separar las expresiones *x/5=y* y *y+7* y escribieron una sola expresión *x/5=y* +7, que es incorrecta y en la cual se evidencia, además, el uso del signo igual como conexión entre pasos de solución, es decir, puede considerarse como evidencia de su reflexión en el proceso de solución, en lugar de utilizar el signo para simbolizar la igualdad entre dos expresiones. Esto muestra dificultades con G4 y G5. Su detección permite reconsiderar este tipo de aspectos en la docencia para aclararlos en clase mediante nuevas actividades.

El modelo se ha utilizado también en el diseño de cuestionarios de diagnóstico, protocolos de entrevista y guías de observación que han probado ser de gran utilidad para estudiar las dificultades que estudiantes de distintos niveles presentan en relación al concepto de variable. Se ha observado que esas dificultades permean los distintos niveles de escolaridad (Trigueros & Ursini, 2006).

Otras investigaciones han permitido utilizar el modelo para analizar las dificultades de los alumnos con los parámetros. Los resultados han mostrado que cuando los problemas algebraicos incluyen el uso de parámetros las dificultades de los estudiantes, aun de los estudiantes universitarios, se agudizan. Los estudiantes consideran los parámetros como números generales, pero para interpretarlos y trabajar con ellos requieren un referente o un enunciado claro que de sentido a la generalización de segundo orden.

Considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3:

¿Para qué valores de p la ecuación $3x^2 + px + 7 = 0$ tiene solución única?

Resultados

Esta ecuación se refiere a una familia de ecuaciones cuadráticas (G1). La incógnita de cada una de las ecuacioes es *x*, pero su valor depende del parámetro. La solución del ejemplo requiere analizar en primer término una relación funcional (F1) entre el parámetro p y la incógnita *x* (F1), después es necesario resolver una ecuación en la que la incógnita es *p* (I1); el parámetro se convierte en la incógnita. La mayoría de los estudiantes ignoran el parámetro y resuelven la ecuación como si este no existiera al no tener la posibilidad de interpretarlo. Algunos estudiantes logran identificar la relación entre el parámetro y la *x*, pero no son capaces de encontrar una ecuación que les permita dar respuesta a la pregunta. Este problema persiste incluso en estudiantes universitarios.

Todas las investigaciones que se han llevado a cabo con el modelo 3UV muestran que el concepto de variable juega un papel fundamental en la comprensión del álgebra. Los estudiantes deben desarrollar gradualmente las capacidades básicas relacionadas con ella, pero cuando se considera el trabajo con situaciones complejas aparecen elementos que van más allá del manejo flexible de la variable que es necesario considerar. Por ejemplo, en problemas como resolver la ecuación $2|x+3|^2-5|x+3| +3=0$ o encontrar el valor de k tal que el conjunto solución de la inecuación $(3x – 13)/(x+k) \leq 2$ satisfaga $x \varepsilon [-3, 8];$ problemas que son comunes cuando se utiliza el álgebra para resolver problemas del cálculo diferencial o en otras disciplinas como el álgbra lineal.

Sin embargo, los resultados de las investigaciones relacionadas con el desarrollo del "sentido de estructura" (Trigueros & Ursini, 2008) mostraron que además de algunos requisitos señaladas por otros autores como indicadores del desarrollo de ese sentido, el uso flexible de la variable en los problemas, conjuntamente con la posibilidad de determinar las

implicaciones de las restricciones en los valores de las variables impuestas por las restricciones o por las definiciones y propiedades necesarias, juega un papel crucial.

Para ilustrar estos aspectos en el taller se utilizó el modelo 3UV para analizar problemas típicos con distinto grado de dificultad, como los que aparecen como ejemplos en este artículo y para ilustrar las dificultades de los alumnos; estos ejemplos incluyeron el uso de problemas en los que aparecen parámetros y problemas para la solución de los cuales el "sentido de estructura" es indispensable.

El diseño de actividades para lograr una enseñanza del álgebra que incluya la discriminación de los distintos usos de la variable así como su manejo flexible se ilustró mediante la discusión de ejemplos específicos de estrategias de enseñanza que han probado ser útiles. Se ejemplificó además una posible estrategia de enseñanza que ha probado ser útil en cursos específicos de álgebra elemental.

Conclusión

Los resultados de investigación ponen de manifiesto que la variable juega un papel crucial en el aprendizaje del álgebra y de las matemáticas en distintos niveles educativos. El reconocimiento de las variables, conjuntamente con los parámetros y el sentido de estructura desde el primer encuentro de los estudiantes con el álgebra son fundamentales. Las investigaciones muestran que es imposible profundizar en el estudio del álgebra si estos elementos no se trabajan constantemente con los alumnos. El modelo 3UV ha probado ser, a lo largo de casi treinta años, una herramienta muy útil no solamente en la investigación sino en la elaboración de estrategias de enseñanza y de evaluación en la práctica diaria en el aula.

Referencias

Trigueros, M. & Jacobs, S. (2008). On Developing a Rich Conception of Variable. En M. Carlson & C. Rasmussen

(Eds.) *Making de connection: Research and practice in undergraduate mathematics*. Section I, Chapter 9, pp. 101-116, MAA Notes, Mathematical Association of America.

Trigueros, M. & Ursini, S. (2008). Structure sense and the use of variable. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, Vol. 4, México, Cinvestav-UMSNH, pp. 337-344.

Trigueros, M. y Ursini, S. (2006) "¿Mejora la comprensión del concepto variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? en Educación Matemática, Núm. 3, diciembre, pp. 5-38. Editorial Santillana.

Trigueros, M., & Ursini, S. (2003). Starting college students' difficulties in working with different uses of variable. Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics Education (Vol. 5, pp. 1-29). Providence, RI. American Mathematical Society.

Ursini, S. and Trigueros, M. (2011) "The role of variable in Elementary Algebra: An approach through the 3UV model" in Roberta V. Nata (Ed.) Progress in Education, Volume 19, pp. 1-38, Nova Science Publishers.

Ursini,S., Escareño, F., Montes, D. & Trigueros, M. (2008) Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa. México, Trillas.

❖❖❖

Razonamiento algebraico en la escuela primaria: problemas y propuestas (versión del libro de resúmenes, envío una versión final en pdf)

Walter F. Castro G
Universidad de Antioquia - Colombia
wfcastro82@gmail.com

Resumen

El curso comprende dos sesiones; en la primera se hace una revisión de la literatura sobre la problemática de la enseñanza del álgebra en la escuela; se presentan ejemplos de enfoques de introducción del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE) en el currículo de algunos países, y se muestran ejemplos de tareas "algebraicas" en los currículos de tales países. En la segunda sesión presentan tareas matemáticas, se discuten aspectos algebraicos de las mismas, y se propone una herramienta de análisis epistémico para identificar objetos y significados matemáticos, de naturaleza algebraica, presentes y emergentes en tareas matemáticas.

Pertinencia del tema. Para lograr que la formación en álgebra alcance a una población mayor, algunos autores han propuesto incluir el razonamiento algebraico desde los niveles inferiores de la educación primaria (Vergnaud, 1988); esta inclusión ha sido denominada "la algebrización" del currículo (Kaput, 2000). En razón a la dificultad del álgebra, y a que las competencias algebraicas de carácter simbólico son el resultado de un proceso de maduración más general que se desarrolla a lo largo del tiempo (Santrock, 2001), se justifica que su enseñanza se inicie desde la escuela primaria.

Cuerpo de la presentación. El contenido matemático que se aborda en esta presentación es el "álgebra en la escuela primaria", usualmente referido en la literatura como "early algebra". El contenido se distribuye en dos sesiones en las cuales se aborda: el problema, alternativas de introducción, ejemplos de introducción en el mundo, y análisis de elementos algebraicos en algunas tareas matemáticas elementales. El análisis se hace con

base en herramientas teóricas provistas por el Enfoque Onto-semiótico de la Instrucción y la cognición matemática (Godino, Batanero y Font, 2007). Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006) "la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico" (p. 88).

Palabras clave: Razonamiento Algebraico Elemental, análisis epistémico, álgebra elemental, currículo, transición.

Referencias

Carraher, D. W., Schlieman, A., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2): 87-115.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM *The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2): 127-135.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: *National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA.

Santrock, (2001). *Psicología de la educación. Motivación y Aprendizaje*. México: McGraw-Hill/lnteramericana.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l' apprentissage de l'algebre. Artículo presentado en las *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des matematiques et de l'informatique*, 189-199, Paris: La Pensée Sauvage.

❖❖❖

Uso de la pizarra digital interactiva en la enseñanza de la matemática

Marisel Rocío Beteta Salas
Colegio Hiram Bingham – Perú
mariselbetetasalas@gmail.com

Resumen

Las nuevas tecnologias estan cobrando un papel importante en la enseñanza, el impacto que tiene actualmente la recepcion de la información es sin duda producto de los avances tecnológicos de los cuales somos testigos. Al respecto Battron y Denham (1997) comentan: "la informática ha modificado drásticamente los comportamientos sociales en los más variados campos en este fin de siglo. Sólo la educación, curiosamente, parecería inmune a esa transformación. En realidad, a pesar de tantos esfuerzos la computadora no se ha incorporado plenamente a la educación moderna. Para muchos es apenas un instrumento que conviene tener por imposición social y/o programática. Ciertamente no ha logrado renovar, hasta hoy, los viejos hábitos de la enseñanza y del aprendizaje heredados del siglo pasado como las actividades presenciales, las clases magistrales, los exámenes". Es increíble que hoy hace más de una década estemos viviendo circunstancias similares en nuestra realidad educativa.

La UNESCO (2008), plantea una serie de estándares ligados a las competencias en el manejo de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) que deben poseer los docentes. El contexto educativo debe ayudar a los estudiantes, con la mediación del docente, a adquirir las capacidades necesarias para llegar a ser competentes para utilizar las TIC. El rol del docente debe ser diseñar entornos de aprendizaje que faciliten el uso de las TIC.
El objetivo de esta presentación es difundir el buen uso de herramientas digitales como lo es la pizarra digital interactiva en la enseñanza de la matemática, de acuerdo a investigaciones realizadas ha demostrado que logra incrementar la atención y motivación de los alumnos, permitiendo que el docente haga uso de múltiples programas educativos para diseñar clases enmarcadas en el desarrollo de la competencia digital, que

implica hacer un uso habitual de las TIC para resolver problemas reales de modo eficiente. Se requiere además de la capacitación en el uso de software para uso de la pizarra digital, estrategias metodológicas que el docente puede seguir para hacer una buena práctica de las herramientas digitales con las que puede contar en el aula.

Palabras clave: competencia digital, pizarra digital interactiva, enseñanza, matemática, TIC.

Introducción

Actualmente nuestra sociedad vive día a día avances tecnológicos a los cuales las instituciones eduactivas no deben dejar de lado, ya que estos cambios demandan por parte del profesorado, renovar, innovar y crear nuevas estrategias de enseñanza en los cuales tenga que incorporar las llamadas TIC (Tecnologías de la Educación y Comunicación) como herramientas que facilitaran su labor como mediador de los aprendizajes de los alumnos.

Entre las herramientas que actualmente ofrecen las TIC al profesor se encuentra la "pizarra digital", que además de potencializar las estrategias de enseñanza diseñadas por profesor, capta la atención y motiva a los alumnos en clase. La pizarra digital, permite proyectar documentos realizados por estudiantes profesores e interactuar sobre su superficie con ellos, además se pueden contar en el aula con los recursos educativos que proporcionan los medios de comunicación e internet. Hacer uso de este instrumento es sencillo, no se requiere de mayores conocimientos que el usar una computadora y navegar en internet.

Es un recurso tecnolgógico poderoso para contribuir a la enseñanza de la matemática, por ser visual e interáctivo. Con muchos aportes en la enseñanza de la geometría por un elevado número de aplicaciones con las que se pueden contar en la web.

Por todas las ventajas que la pizarra digital ofrece, el profesor debería conocer sobre este recurso didáctico – tecnológico, su funcionalidad y las herramientas que ofrece.

La pizarra digital interactiva

La pizarra digital (PD) es un sistema formado por una computadora y un vídeo proyector que reproduce la imagen del ordanor.

La pizarra digital interactiva (PDI), incluye además una pantalla conectada que cumple una doble función, de monitor y dispositivo de entrada de modo que se pueda controlar cualquier aplicación consólo tocar la pantalla.

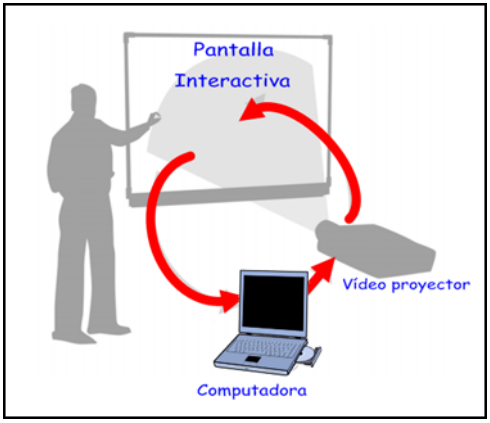


Figura N° 1

Funciones de la Pizarra digital Interactiva

Se pueden mencionar entre muchas de las funcionalidades de la pizarra digital las siguientes:

- Proyectar información de la computadora, DVD, lector de documentos…
- Con el puntero, rotulador o nuestras manos a modo de ratón, desde la PDI se puede controlar el ordenador. (El usar estas récnicas dependen de la marca de PDI).
- Con el puntero, rotulador o nuestros dedos a modo de lápiz, se pueden hacer anotaciones sobre las imágenes proyectadas y luego almacenarlas.
- Su cuenta con bancos de imágenes, animaciones multimedias, fondos de pantalla y otros recursos didácticos interactivos.

- Se cuentan con programas editores multimedia que permiten elaborar presentaciones y materiales didácticos interactivos.
- Otras funcionalidades: grabadora en vídeo, lupa, cortinas y focos, captura de pantallas, conversión texto manual a texto impreso...

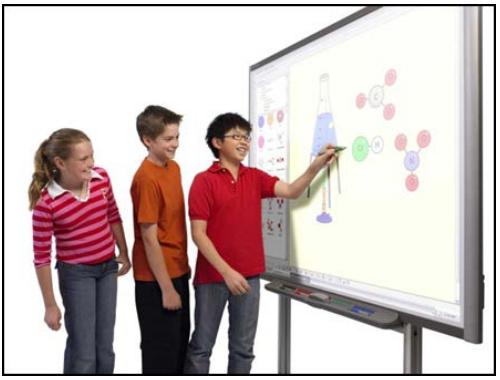


Figura N°2

Marquès, Pere (2010) comenta "las clases pueden ser más vistosas y audiovisuales, facilitando a los estudiantes el seguimiento de las explicaciones del profesorado (y además se sienten más como en casa cuando están ante el mundo audiovisual del televisor o Internet) y la comprensión de los temas, que ahora se aproximan más a sus experiencias previas. Así resulta más fácil relacionar lo nuevo con lo que ya saben y realizar unos aprendizajes más significativos".

Estrategias didácticas haciendo uso de la pizarra digital interativa

Una pizarra digital interactiva no sólo permite escribir en ella y borrar lo escrito es su superficie, si sólo hacemos esto estamos haciendo uso de una pizarra tradicional con la diferencia que el profesor no se va a manchar con las tizas o plumones.

La pizarra digital interactiva permite al profesor: escribir, mostrar, interactuar, guardar, ocultar, grabar, comparar, buscar,

autoevaluar, corregir, reproducir, ver, animar, borrar, arrastrar, resaltar, relacionar, etc.

Hacer uso de la PDI cambiará forma de enseñar del profesor quien contará con más recursos para lograr el aprendizaje y consolidación de contenidos, a los alumnos les cambiará la forma de aprender, desarrollando multiples competencias entre ellas el aprender a aprender.

Estas son algunas estrategias didácticas que se pueden haciendo uso de la PDI:

- Realizar descripciones colectivas de una persona, paisajes, un objeto, etc. Resaltando ideas importantes.
- Leer y escuchar textos. Grabados por parte de profesor o del alumno, o verlos en internet.
- Leer un folleto, catálogo, prospecto o un libro digitalizado. Muchas editoriales están haciendo digitales las versiones impresas, implementándolas con otros recursos de video y sonido.
- Hacer uso de diccionario visual. El profesor de este siglo debe aceptar que no lo sabe todo, ahora puede buscar de inmediato en la web la palabra o imagen desconocida.
- Realizar videoconferencias con otras clases (docencia compartida) o colegios.
- Se pueden hace debates partiendo de la presentación de un video, una lectura, una canción que lleve un mensaje o lectura de la prensa.
- Hacer uso de herramientas en internet como de crucigramas, sopa de letras, autocompletar, etc. El profesor cuenta con varias plataformas donde se están desarrollando más recursos digitales para uso de la PDI.
- Animar los temas, con imágenes, videos, esquemas, cuadros resumen, resaltando ideas, ocultando respuestas esperadas, etc.
- Hacer uso de todas las herramientas de la web 2.0, para elaborción de trabajos personales, colaborativos y exposiciones. (Uso de blog/wiki del curso)

- Correción colectiva de ejercicos, el profesor puede escanear las páginas del libro o cuaderno del alumno para proyectarlo en la PDI.
- Pintar con as diversas herramientas de dibujo que ofrece las herraietnas 2.0.
- Componer música haciendo uso de programas que facilitan tocar diversos instrumentos musicales y leer partituras.
- Grabar las clases para luego compartirlas como video o archivos de lectura con todos los alumnos o profesores que comparte el curso.
- Crear y diseñar materiales didácticos con ayuda de los softwares que las PDI ofrecen al profesor.

Uso de tecnologías en la enseñanza de la matemática

Respecto a los recursos y esrategias para el estudio de las matemáticas, Godino (2003) comenta "el estudio de las matemáticas requiere enfrentar al alumno a problemas o tareas cuya solución son los conocimientos matemáticos pretendidos. Esta confrontación con situaciones problemas, inductora de la actividad de matematización, contribuíra, además, a su formación integral como persona, objetivo final del proceso educativo". Las TIC ofrecen a los profesores varias herramientas para posibilitar optimizar el aprendizaje de las matemáticas.
Las TIC nos ayudan a cambiar el modelo clásico de clase magistral por un modelo de clase más activa, donde el alumno aprende descubriendo, generando una hipótesis, el profesor lo acompañará en la investigación, la reflexión, estructurando de manera lógica el conocimiento.

Actualmente las calculadoras y las computadoras son consideradas herramientas esenciales para la enseñanza de las matemáticas. "La tecnología es esencial en la enseñanza y e parendizaje de las matemáticas, influye en las matemáticas que se enseñan y favorece el aprendizaje de los estudiantes" (NTCM, 2000).

La ventaja que nos ofrecen las TIC es que permiten a los estudiantes experimentar y explorar todos los aspectos de la

matemática ya que con el uso de la computadora se facilita, el análisis de datos, la graficación y el cálculo de manera efciente y precisa, centrando la atención de los estudiantes en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas, apoyando de esta manera la investigación en las disitntan áreas de la matemática: geometría, estadística, algebra, trigonometría y sistemas numéricos.

El aporte de los medios tecnológicos a través de las herramientas que facilita al profesor para la enseñanza de la matemática ha sido considerable, es por ello que deben de experimentar cambios en las formas de enseñanza, aprovechando al máximo las herraietnas tecnologicas. Según Gúzman (2000), ha llegado el momento de que las formas de enseñanza y los mismos contenidos deben experiementar cambios drásticos, para dar paso a la comprensión por parte del estudiante de los procesos matemáticos, mas que en las ejecuciones rutinarias, preprándolo en el diaologo de las herramientas ya existentes, con lo cual el alumno estará familiarizado con el uso de las herramientas tecnológicas. Sólo de esta manera las clases demandaran de un profesor que responda a las necesidades del alumno de este siglo, quien convive con el uso de la tecnología en su día día.

Estrategias didácticas haciendo uso de la pizarra digital interativa en la enseñanza de la matemática

Estas son algunas de las estrategias didácticas que se podrían emplear haceindo uso de la pizarra digital en el usode la matemática:

- Resolución de problemas, contextualizando los problemas con imágenes o videos, realizando diversas técnicas de resolución como ocultar la respuesta correcta, demostrando con el proceso de resolución que conduce a la solución del problema. Luego se pueden avanzar y retroceder los pasos seguidos para cuestionar el camino seguido.
- Trabajar con imágenes prediseñadas en para el área de geometría, el profesor cuenta con un numerosas imágenes para facilitar la visualización de formas geométricas. Para trabajar la geometría se puede hacer uso de diferentes

figuras, líneas, formas, longitudes, posiciones, cuerpos, ángulos, hacer transformaciones, haciendo para ello uso de porgamas de geometría dinámica como CABRI y GeoGebra. Ver y reflexionar sobre dibujos ya elaborados, como también imágenes en fotografía digital, retratando la vida matemática, para ver medidas, relaciones entre objetos, simetrías, etc. http://www.xtec.cat/~ebraso,http://www.fractal-recursións.com,http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Exposiciones/artemate/perry/artenate.asp

- Realizar estudio de gráficas a través de programas de base de hojas de cálculo, para pasar al análisis y conclusión de alguna investigación, muchas veces no se llega a estas fases de la investigación porque el alumno se queda operando y graficando, brindando poca atención a las últimas fases de su investigación. Podemos utilizar Calc de OpenOffice, Microsoft Excel, Gnumeric, KSpread, etc.
- Hacer uso de programas educativos que se encuentran alojados en diversas plataformas que promueven el uso de las TIC para la enseñanza de la matemática, entre algunos programas destacan: JClic, Thatquiz, Hotpotatoes, Ardora, etc
- Hacer uso de internet para conseguir documentación diversa sobre historia de las matemáticas,relación con otras áreas, por ejemplo obtener información de estadísticas del mundo en tiempo real: http://www.worldometers.info/es/, http://aulamatematica.com, http://www.rinconmatematico.com
- Hacer uso del video para motivar o reforzar un tema: http://www.matematicasbachiller.com/videos http://www.videosdematematicas.com/enlinea/node/100

Herramientas del Notebook Math para Pizarra Digital Smart Board

La pizarra digital interactiva Smart Board ofrece al profesor a través de las múltiples herramientas del software notebook math, un conjunto de herramientas que son de uso dirigido especialmente al área de matemática para potencializar situaciones de enseñaza.

Cuadro N° 1: Herramientas de Notebook Math		
	Editor de Ecuaciones Avanzado	Inserte y edite ecuaciones con calidad de libro de texto. Podrá copiar y pegar ecuaciones o conjuntos de preguntas de otras aplicaciones de software, como por ejemplo, Microsoft Word, sin necesidad de modificar el formato. SMART Notebook Math Tools reconoce la mayoría de las ecuaciones, con lo que le permite resolverlas y presentar las soluciones en forma de gráfico
	Polígonos Irregulares	Además, SMART Notebook Math Tools incluye 12 polígonos estándar regulares y una nueva herramienta de polígonos irregulares que le permite crear polígonos con tantos lados como desee. Midiendo ángulos y lados.
	Polígonos Regulares	Dibuja polígonos regulares hasta de 15 lados.
	Tablas	Notebook math representa gráficamente en un plano de coordenadas los valores que se asignan en la tabla de datos.
	Graficos	Asistente de gráficos en el plano de coordenadas. Permite generar graficos a partir de la ubicación de coordenadas.

	Herramientas de medición	Obtenga mediciones precisas con la regla y transportador avanzada. Dibuje arcos y círculos fácilmente con el compás.

Es el docente quien diseñará una secuencia de clase donde gracias a estas herramientas potenciará sus estrategias de enseñanza alcanzando no sólo motivar a sus alumnos sino que además les permitirá el desarrollo de habilidades tanto matemáticas como digitales.

Referencias

Battro, Antonio y Denham, Percival (1997). La Educación Digital. Una nueva era del conocimiento. Editorial EMECE, Buenos Aires. Versión Digital: http://www.byd.com.ar/edwww.htm

Godino Juan, Batanero Carmen y Font VicenÇ (2003) Fundamentos de la Enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros. Recuperado el 23 de enero de 2011, de: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Gúzman, M. (2000). Tendencias innovadoras en educación matemática. Recuperado el 22 de abril del 2011 de: http://www.prof2000.pt/users/coimbracom/materials/Tendec_ens_mat_guzman.htm

Jubany i Vila, Jordi (2010). La Utilización de nuevos recursos digitales en el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Suma: *Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (65), pp. 43 - 26.

Marqués Graells, Pere. (2006) *La pizarra digital en el aula de clase: Posiblemente el mejor instrumento que tenemos hoy en día par apoyar la renovación pedagógica en las ualas. En revita Didáctica, Innovación y Multimedia (20)* http://www.pangea.org/dim/revista

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Real Pérez, Mariano. (2010). *MatemásTIC: Tratamiento de la información y competencia digital en el área de matemáticas. Suma: Revista sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 64, pp. 71 -80.

UNESCO (2008), Estándares de competencia en TIC para docentes, Londres, disponible en: http://www.eduteka.org/EstandaresDocentesUnesco.php.

❖❖❖

Introducción de la probabilidad en la educación superior

Augusta Osorio Gonzales.
Pontificia Universidad Católica del Perú – Perú.
arosorio@pucp.edu.pe

Resumen

Hay diversas propuestas que permiten llegar a enseñar adecuadamente el concepto de probabilidad, muchas de estas se pueden ir viendo en los distintos textos desde el nivel primario hasta el nivel universitario, pero tambien en muchas de ellas se observa que siempre se deja un poco de lado lo que es el analisis a profundidad de las situaciones aleatorias. Un problema adicional, en el nivel escolar, es que los temas estadisticos en la mayoria de los casos son dejado al final de programas de matemáticas y, por tanto son tomados con muy poco tiempo y poca profundidad. Las actividades que se llevarán a cabo en el taller a presentarse, son parte de un proceso de instrucción que tiene como meta llegar a presentar el concepto de probabilidad mediante el análisis de las situaciones aleatorias en el nivel universitario.

Introducción

La enseñanza del concepto de probabilidad esta intrínsecamente ligada con el concepto de situación aleatoria. Desgraciadamente son pocos los libros de Estadística general que desarrollan esta relación y cuando lo hacen la muestran de una forma sumamente superficial. Entonces, si se desea hacer llegar a los alumnos los conceptos básicos que les permitirá entender la necesidad de la existencia del concepto probabilidad, es necesario enfrentarlos al manejo de las situaciones aleatorias y todos los conceptos relacionados con ellas. Dado que la bibliografía disponible no nos puede servir de apoyo, el único medio en el que nos podamos apoyar es en la creación de actividades con ese fin.

La autora dicta desde hace más de siete años, un curso de Estadística general a nivel universitario; dicho curso se

caracteriza por el uso de metodologías colaborativas y ABP en el desarrollo de las clases. El curso se dicta en la unidad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú y en él se inscriben alumnos de una edad promedio de 19 años, los cuales deberían poseer un conocimiento de Estadística básica proveniente de sus años escolares y un curso previo de matemáticas. Desgraciadamente, muchos de ellos han visto solo temas de procedimientos estadísticos y están capacitados para manejar algunos conceptos de medidas de tendencia central o dispersión, lo que se enseña normalmente en estadística descriptiva. Pero su nivel de conocimiento en temas relacionados con las probabilidades es limitado.

Es en el conocimiento de esta situación que la autora diseño diversas actividades que puedan ayudar al entendimiento de los conceptos de interés y en el establecimiento de la relación entre ellos. Estas actividades se comenzaron a utilizar desde el 2005 e inicialmente solo cubrían el manejo de los conceptos de incertidumbre, situación aleatoria, situación determinista, espacio muestral y eventos. Posteriormente se incluyó la actividad que estaba dirigida al concepto de probabilidad. Las actividades casi no han sufrido alteraciones con respecto a las originales, los mayores cambios se han realizado con respecto al manejo de los conceptos y a las aclaraciones dirigidas a los alumnos para lograr la comprensión de los mismos.

Estos cambios han permitido lograr una articulación adecuada entre los conceptos que se manejan durante las actividades y las situaciones de incertidumbre de la vida diaria que enfrentan los alumnos. Esto permite al final del proceso de instrucción, que el alumno este en capacidad de enfrentar la elaboración del diseño de un experimento aleatorio referido a una situación de su vida cotidiana, donde pueda aplicar todos los conceptos vistos durante las actividades.

Los conceptos puntuales que se trabajaran durante las tres actividades que veremos en el taller son:

A. La definición de una situación de incertidumbre.

B. El contexto donde se da la situación de incertidumbre, donde se expresan las condiciones y restricciones que regirán a los posibles resultados de la situación.
C. El concepto de experimento aleatorio.
D. El espacio muestral, que es el conjunto de todos los posibles resultados dentro de la definición y contexto de la situación de incertidumbre.
E. El suceso o evento simple, que es cada uno de los posibles resultados del espacio muestral, también denominados posibilidades.
F. El suceso o evento compuesto, que es cada uno de los elementos del conjunto potencia del espacio muestral, que no es un suceso o evento simple.
G. El concepto de probabilidad.

Los métodos utilizados para realizar las actividades

El curso de Estadística (ABP) diseñado por la autora; tiene entre sus diversas actividades, las que se denominan actividades colaborativas de pares. La naturaleza de estas actividades es que son diseñadas para la introducción a determinados conceptos vistos en el curso mediante el uso de algún ejemplo de la vida cotidiana y que el alumno pueda realizarlas sin la necesidad de ninguna presentación previa de un concepto estadístico.

Las actividades son denominada de pares, porque se realizarán entre los alumnos, normalmente agrupados en parejas o tríos y solo se apoyan en los docentes mediante preguntas (en el aula se dispondrá, para las preguntas, de la profesora del curso y de dos asistentes de aula). Estas actividades no tienen un tiempo exacto de duración y dependerán del desempeño de los grupos. Las actividades se diseñaron con un tiempo promedio y teniendo como una referencia el tiempo total de la clase, pero cada grupo de alumnos demorará de acuerdo a su propio ritmo. Igualmente, el grado de profundidad en el trabajo a realizar dependerá de la inquietud propia de los alumnos. Hay que tener en cuenta que cada actividad cuenta con preguntas diseñadas para cubrir un grado de conocimiento mínimo, que permita el avance del alumno con respecto al resto de temas del capítulo.

Las actividades que son de nuestro interés para el taller, se realizan durante las sesiones teóricas del curso (el curso consta de dos sesiones teóricas a la semana de dos y una hora) y se presentan durante las semanas 5 y 6 de clases. Son en total tres actividades, la primera y la segunda están diseñadas para una hora cada una, estas actividades se realizan durante la primera sesión teórica del curso en la semana 5 de clases; la tercera actividad tiene una duración de una hora y se presenta en la primera sesión teórica del curso en la semana 6 de clases.

Los conceptos vistos en estas actividades, se afianzarán con otras actividades, dentro de las mismas dos semanas. Los alumnos tienen la posibilidad de realizar una tarea para casa con asesoría, una evaluación en línea de práctica y un taller trabajado sobre un caso donde se trabajan todos los conceptos vistos.

Actividad 1

La idea principal de esta primera actividad es que los alumnos experimenten el análisis de posibilidades mediante el planteamiento de situaciones aleatorias o también denominadas situaciones de incertidumbre. Los alumnos describirán las posibles respuestas a una determinada acción y luego tratarán de buscar una relación entre los análisis hechos a dos situaciones distintas. La idea es que puedan establecer por si mismos el entendimiento de lo que es la incertidumbre y en qué momento de la situación es que aparece.

Las situaciones que se le plantean a los alumnos en la actividad para el análisis de posibilidades son las siguientes:

Situación 1: "Julia se encuentra conversando con su amiga Susana sobre la celebración de su primer año de casada. Julia le cuenta a Susana que su esposo Orlando le ha comentado que lo celebrarán el próximo jueves de una manera muy especial. Ella está tratando de imaginarse la sorpresa conociendo lo poco romántico que es Orlando y el poco tiempo que tienen para la celebración, con las justas contarán con unas tres o cuatro horas, puesto que Orlando está "full" con sus estudios para recibirse como médico. Converse con su pareja de trabajo y juntos

preparen una pequeña lista que considere las posibles formas de celebración que Julia podría imaginar, considerando que los recursos de la pareja no son muchos ya que Julia trabaja como secretaria en una pequeña oficina y Orlando recibe solo 1000 Nuevos soles por el trabajo que realiza. Se les sugiere colocar un monto límite de dinero para la celebración.

Situación 2: "Antonio ha sido invitado por su amiga Olga a una función de teatro con fines benéficos el próximo viernes a las 6pm. Él tiene otro compromiso ese mismo día, en la casa de un amigo en Surco y la invitación es a partir de las 7pm. Antonio sabe que le demorará 30 minutos ir del local de la función de teatro a la casa de su amigo. Él no piensa realizar otra actividad antes de llegar a Surco y ha prometido asistir a la función de teatro pero no ha prometido presenciarla totalmente.
Les pedimos que nos den una posible lista de los tiempos que transcurren desde que comienza la función de teatro hasta el momento que Antonio llegue a casa de su amigo en Surco. También coloquen al lado del tiempo lo que suponen que sucede para que se de ese tiempo".

Se les solicita a los alumnos que en base a lo que han respondido, establezcan las similitudes que tienen estas dos situaciones. Se espera que los alumnos puedan establecer, que se tenga que esperar a que finalice la acción involucrada en la situación, para poder establecer el resultado que realmente se da. Es decir, que antes que la acción se realice se puede tener una posible lista de resultados, pero no es hasta que termine de darse la acción que se sabrá exactamente lo que paso. Esta es la característica básica de una situación de incertidumbre.

Posteriormente se les invita a plantear acciones que funcionen como situaciones de incertidumbre y que planteen sus diversas posibilidades de resultado. Para eso se les da un contexto general, por ejemplo un paseo a la playa. Dentro de ese contexto es que deben plantear la acción a analizar. Los docentes en el aula procederán a ir revisando las situaciones que plantean y a verificar que efectivamente se traten de situaciones de incertidumbre.

Al final de esta primera actividad, se les pedirá a los alumnos que planteen alguna situación que funcione contrariamente a una situación de incertidumbre. Es decir, que planteen una situación donde se pueda saber el resultado sin tener que esperar a que termine de suceder la acción involucrada en ella.

Actividad 2

En la segunda actividad, se busca que los alumnos trabajen con los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y eventos. En la actividad, se les presenta a los alumnos una nueva situación de incertidumbre y se le solicitará, en primer lugar, que analicen si esta situación se puede identificar como un experimento aleatorio. Se busca básicamente, que los alumnos puedan establecer si es que, dentro del contexto de la situación, existen condiciones que puedan mantenerse cada vez que se realice la acción involucrada.

En segundo lugar, se les pide que piensen en todos los posibles resultados de esta situación, por muy poco factibles que les parezcan. La idea es poner a su consideración una situación de incertidumbre que determine un espacio muestral complejo, es decir, que cada posible resultado pueda estar compuesto por más de una respuesta.

En nuestro caso en particular usaremos la siguiente situación de incertidumbre: "Llega usted a la cafetería de su facultad a la hora de almuerzo y se encuentra con su amiga Sofía. Verifique qué podría estar almorzando ella, si cuenta con 20 soles para comer y no está de dieta. No considere nombres de platos, sino tipos de platos.".

En el caso de las cafeterías de nuestra universidad, se tienen una serie de posibilidades para la hora de almuerzo. Se puede comprar: un plato básico (un segundo con refresco), un menú (una entrada, segundo y postre), algún tipo de combo (emparedado y refresco), platos de comida extras, entradas, postres o algún tipo de snack. La idea es que los alumnos perciban que Sofía puede comer solo una de estas posibilidades o cualquier combinación de ellas. Entonces dentro del espacio muestral los alumnos deben plantear posibles resultados como:

básico o (básico, postre) o (básico, postre, snack) o (menú, snack) o (plato extra, entrada, postre).

Una vez establecido el espacio muestral, se solicitará definir algunos eventos en su forma por extensión (conjuntos) y en su forma por compresión. La idea es que los alumnos puedan percibir que un evento puede identificarse como un conjunto de posibilidades o se puede definir mediante su forma comprensiva. En la segunda parte se les da eventos en forma comprensiva y ellos los deben pasar a su forma extensiva. Hay que tener presente que esta parte es muy importante para el trabajo de eventos, dado que en los ejemplos y problemas de probabilidades se encuentran los eventos siempre definidos en su forma de comprensión.

Actividad 3

En esta tercera actividad y por medio de una de las situaciones aleatorias vistas en la actividad inicial, los alumnos comenzarán a plantearse la aparición de números relacionados con las posibilidades y que cumplan determinadas características.

Se les pedirá inicialmente que escojan las posibilidades del espacio muestral que juzgan las más factibles y que las presenten ordenadas por su factibilidad. Luego que tengan esta lista ordenada, se le pedirá que coloquen un número relacionado con cada posibilidad, de acuerdo a dos reglas: la primera dice que los números debe preservar el orden de factibilidad de las posibilidades y que también muestren cuanto más factible es una posibilidad que la posibilidad siguiente. Es decir, se les pide que planteen sus propias probabilidades con respecto a estas posibilidades.

Por medio, de esta actividad es que los alumnos, verán la necesidad de expresar de algún modo el hecho de que una posibilidad es más factible de suceder que otra y por tanto la aparición de un numero que funcionara como lo debe hacer una probabilidad. Para ayudarlos a llegar a la idea del uso de los numero expresados como porcentajes, se puede plantear que la factibilidad total es un valor fijo que se reparte entre todo el espacio muestral y que el asignar un valor a cada posibilidad

funciona como el reparto de una torta. Eso facilita el hecho de no usar cualquier número como una probabilidad sino el paso lógico de usar valores en el intervalo de 0 a 1.

En un segundo momento de la actividad, se les pide que reflexionen sobre las posibilidades que no consideraron del espacio muestral. Deben indicar el valor de factibilidad que estaría asociado a ellas y qué significado tiene este valor. La idea es que comiencen a distinguir entre el concepto de posibilidades probables y de posibilidades no probables.

Todo este trabajo les permitirá comenzar a entender la diferencia entre el concepto de posibilidad y probabilidad.

Resultados de las actividades

Los resultados que se han obtenido de este grupo de actividades son varios. De la primera actividad se puede establecer y durante la misma ejecución de la actividad, que los alumnos comienzan a modificar su forma de ver el mundo. Pasan de considerar a todas las acciones de su día a día, de situaciones deterministicas a situaciones de incertidumbre. Tanto así, que cuando llegan a la última parte de dicha actividad es casi imposible que encuentren algún ejemplo de situación determinística, porque ellos mismos perciben la incertidumbre de las diversas situaciones que se plantean. Otro resultado de esta primera actividad es que los alumnos, pueden entender por si mismos la idea de incertidumbre e incluso poder comenzar aplicarla en un contexto dado.

De la segunda actividad, se tiene de resultado que los alumnos tengan una apertura a los espacios muestrales de tipo complejo. Normalmente los ejemplos que se asocian a los espacios muestrales son bastante sencillos, donde se da simplemente una lista de posibles resultados unitarios. Es importante, que los alumnos puedan entender en su cabalidad el significado de espacio muestral y sean capaces de poder establecer el correspondiente a cualquier tipo de situación aleatoria.

Para que lo visto en las dos actividades sea totalmente asimilado por los alumnos, se les deja al finalizar una tarea para casa que

implica la utilización de todos los conceptos vistos. La seguridad que tenemos que dicha tarea se va a efectuar es que forma parte del desarrollo del trabajo final individual del curso. Si esta tarea no es adecuadamente hecha, los alumnos no tendrán la base para el desarrollo de dicho trabajo.

Con respecto a la tercera actividad, uno de los resultados que se ha podido obtener es que los alumnos pueden relacionar más claramente el concepto de probabilidad con situaciones reales y de la vida diaria. Y principalmente que pueden establecer una clara diferencia entre lo que significa una posibilidad y su probabilidad asociada.

Conclusiones sobre las actividades

Es importante para la forma en que se lleva la ejecución del curso, que los alumnos ingresen a tratar los conceptos de probabilidad alejándose de las ideas preconcebidas que tradicionalmente se asocian a ella. Que son: los juegos de azar y las situaciones de la vida diaria asociada al planteamiento clásico de la probabilidad. La idea que se encuentra detrás de todas estas actividades es que los alumnos trabajen con situaciones que están muy alejadas de lo que usualmente se asocia con situaciones probabilísticas en los libros de texto escolares.

Definitivamente, hemos experimentado que las actividades diseñadas cumplen plenamente este deseo. También se ha observado que los alumnos logran comprender y entender los conceptos vistos, de manera que pueden después explicarlos en sus propias palabras y utilizando ejemplo propios.

Estamos en realidad bastante satisfechos con estas actividades y vemos que los resultados que encontramos en los alumnos ciclo a ciclo son los esperados.

Fichas de actividades

Actividad 1

CONTEXTO 1

Julia se encuentra conversando con su amiga Susana sobre la celebración de su primer año de casada. Julia le cuenta a Susana que su esposo Orlando le ha comentado que lo

celebrarán el próximo jueves de una manera muy especial. Ella está tratando de imaginarse la sorpresa conociendo lo poco romántico que es Orlando y el poco tiempo que tienen para la celebración, con las justas contarán con unas tres o cuatro horas, puesto que Orlando está "full" con sus estudios para recibirse como médico.

Converse con su pareja de trabajo y juntos preparen una pequeña lista que considere las posibles formas de celebración que Julia podría imaginar, considerando que los recursos de la pareja no son muchos ya que Julia trabaja como secretaria en una pequeña oficina y Orlando recibe solo 1000 Nuevos soles por el trabajo que realiza. Se les sugiere colocar un monto límite de dinero para la celebración.

A. Consideramos que cuentan con _____ Nuevos soles para la celebración.

B. Tomando en cuenta el punto A, consideramos que pueden celebrar mediante:
   1. _____
   2. _____
   3. _____
   4. _____

   (*Colocar en cada posibilidad la forma de celebrar en el tiempo que tienen disponible, sean específicos por ejemplo si dicen que irán a comer mencionen un posible lugar o si van a pasear indiquen el lugar*)

C. Adicionen ahora el hecho que en el tiempo que disponen, ellos pueden realizar solo _____ actividades.

D. Tomando en cuenta el punto A y C, consideramos que pueden celebrar mediante:

   Posibilidad 1. _____

   Posibilidad 2. _____

Posibilidad 3. _____

Posibilidad 4. _____

E. ¿Cuál será el número total de posibilidades distintas que creen ustedes que puedan realizar Julia y Orlando para poder celebrar su aniversario?

_____
_____
_____

CONTEXTO 2

Antonio ha sido invitado por su amiga Olga a una función de teatro con fines benéficos el próximo viernes a las 6pm. Él tiene otro compromiso ese mismo día, en la casa de un amigo en Surco y la invitación es a partir de las 7pm. Antonio sabe que le demorará 30 minutos ir del local de la función de teatro a la casa de su amigo. Él no piensa realizar otra actividad antes de llegar a Surco y ha prometido asistir a la función de teatro pero no ha prometido presenciarla totalmente.

Les pedimos que nos den una posible lista de los tiempos que transcurren desde que comienza la función de teatro hasta el momento que Antonio llegue a casa de su amigo en Surco. También coloquen al lado del tiempo lo que suponen que sucede para que se de ese tiempo

Tiempo	Lista de sucesos para el tiempo Establecido

¿Qué encuentran en común entre las dos situaciones presentadas?

_____

_____

_____

Detallen a continuación una situación como las presentadas y que este inmersa en el contexto de pasar un día en la playa. *Por ejemplo: Verificar el tiempo que podrá tomar sol una persona durante un día en la playa.* **Su propuesta es***:*

_____

_____

_____

Identifique todos los posibles resultados de la misma.

_____

_____

_____

Por otro lado, existe otro tipo de situaciones que son opuestas a las vistas. Por ejemplo, Verificar lo que hace una piedra sin soporte.
Detalle una posible situación de este tipo.

_____

_____

_____

Actividad 2

Para la siguiente situación aleatoria, contesten las preguntas propuestas:

Llega usted a la cafetería de su centro de trabajo a la hora de almuerzo y se encuentra con su amiga Sofía. Verifique qué podría estar almorzando ella, si cuenta con 20 soles para

comer y no está de dieta. No considere nombres de platos, sino tipos de platos.

A. El contexto de la situación es:

_____

_____

B. Las condiciones de la situación son:

_____

_____

C. ¿A esta situación se le puede denominar *Experimento aleatorio*?

_____

_____

Considerando que al conjunto de todos los resultados posibles se le denomina *espacio muestral*, determine el espacio muestral de la situación propuesta

Espacio muestral={

Considerando que a cada posible resultado se le denomina *suceso o evento simple,* determine 2 eventos simples de distinto tipo.

Evento 1: {

Evento 2: {

Ahora, defina nuevamente cada suceso simple, pero hágalo por comprensión (es decir, utilice una oración para definirlo)

Evento 1: _____

Evento 2: _____

Considerando que a cada subconjunto del conjunto potencia del espacio muestral que no es un suceso o evento simple se le

denomina ***suceso o evento compuesto***, determine dos eventos compuestos del espacio muestral definido:

Evento compuesto 1: { **}**

Evento compuesto 2: { **}**

Dados los siguientes eventos compuestos en forma comprensiva, defínalos en forma extensiva.

- **Sofía come al menos una ensalada**.
- **Sofía no está comiendo entrada ni postre.**

Actividad 3

Julia se encuentra conversando con su amiga Susana sobre la celebración de su primer año de casada. Julia le cuenta a Susana que su esposo Orlando le ha comentado que lo celebrarán el próximo jueves de una manera muy especial. Ella está tratando de imaginarse la sorpresa conociendo lo poco romántico que es Orlando y el poco tiempo que tienen para la celebración, con las justas contarán con unas tres o cuatro horas, puesto que Orlando está "full" con sus estudios para recibirse como médico.

De la lista de las posibles formas de celebración que puede escoger Orlando para su aniversario con Julia si cuenta con un presupuesto de 150 soles y solo ha considerado una sola actividad para la celebración. Tome las posibilidades que usted considera con mayor factibilidad de suceder y colóquelas en un posible orden de mayor a menor.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

Si usted desea dar un valor de factibilidad de cada una de las posibilidades listadas, ¿qué valores les daría?

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____

¿Qué condición cree usted que debieran cumplir los valores de factibilidad que usted ha dado a las posibilidades escogidas?

_____

_____

_____

_____

_____

¿Qué sucede con aquellas posibilidades que usted no ha considerado en la lista?

_____

_____

_____

_____

_____

Referencias

Osorio, A (2011). *Estadística (ABP)*. Oficina de publicaciones de la Pontificia Universidad Católica del Perú

❖❖❖

Haciendo Matemática con Mathematica (versión del libro de resúmenes)

Mariano González Ulloa
Pontifica Universidad Católica del Perú
mgonzal@pucp.edu.pe

Resumen

Mathematica es un software que permite combinar cálculo simbólico, numérico, gráficos, videos y sonidos de manera interactiva. Además es un potente lenguaje de programación, todo esto lo convierte en un sistema muy útil en la solución de múltiples problemas de matemáticas, aplicaciones de la Matemática en diferentes áreas como Ingeniería, Economía, Computación, Biología, Física, Química, Educación, Arte, Diseño, etc. y sobre todo en investigación.

En el taller se desarrollará ejemplos de diferentes clases, a través de los cuales se mostrará las funciones fundamentales de Mathematica (v.8.0.0) y la manera como usarlas. Desde un cálculo simple como hallar el valor de una función (como una simple calculadora), hasta encontrar la solución de un sistema de ecuaciones polinómicas en varias variables, pasando por pequeñas secuencias de Geometría Dinámica, gráficas y animaciones de diferentes objetos matemáticos; y la elaboración de pequeños programas. Al mismo tiempo se mostrará la elaboración de documentos interactivos que facilitan la presentación de conceptos y resultados.

Palabras clave: Mathematica, programas, Geometría Dinámica, sistema interactivo.

Referencias

Wolfram, (2010) Mathematica 8.
http://www.wolfram.com/mathematica/
http://www.wolfram.com/broadcast/screencasts/handsonstart_spanish/

http://www.wolfram.com/broadcast/screencasts/jonm/appin60/
http://www.wolfram.com/broadcast/
http://www.eduinnova.es/monografias09/ene2010/MATHEMATICA.pdf

❖❖❖

Técnicas de evaluación en matemática

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Carolina Rita Reaño Paredes
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú
creano@pucp.edu.pe

Resumen

En este taller se analizarán los factores involucrados en la evaluación del aprendizaje en matemáticas, en particular. Se revisarán técnicas de evaluación cuantitativa y cualitativa que permiten identificar, estimular, predecir y orientar el comportamiento de los alumnos, y tomar decisiones sobre las estrategias de enseñanza utilizadas en el aula.

Las técnicas e instrumentos de evaluación que revisaremos son los que se vienen utilizando en la educación básica y superior en diversas instituciones. Entre las técnicas de evaluación cualitativa revisaremos taxonomías y rúbricas en matemática. Y entre las técnicas de evaluación cuantitativa revisaremos pruebas de opciones múltiples, evaluando los set de preguntas a través de los coeficientes de dificultad y discriminación.

Al finalizar este taller, los participantes aplicarán los conocimientos adquiridos para planificar y diseñar instrumentos de evaluación, que les permitan identificar el avance de sus estudiantes respecto a los contenidos trabajados.

Palabras clave: evaluación cualitativa, evaluación cuantitativa, pruebas de opciones múltiples, índices, taxonomías, rúbricas.

La evaluación del aprendizaje

Una educación que busca la formación integral de la persona, mediante el desarrollo de capacidades, actitudes y la adquisición de conocimientos que le permitan acceder con éxito al mundo laboral, exige una concepción de la evaluación del aprendizaje que contribuya a este propósito.

Según la Guía de evaluación del aprendizaje del Ministerio de Educación del Perú (2004): "La evaluación del aprendizaje es un proceso, a través del cual se observa, recoge y analiza información relevante, respecto del proceso de aprendizaje de los estudiantes, con la finalidad de reflexionar, emitir juicios de valor y tomar decisiones pertinentes y oportunas para optimizarlo" (p. 7)

Tomando en cuenta esta definición, podemos decir que la evaluación es un proceso continuo que mide el logro de objetivos de los estudiantes y favorece su capacidad de seguir aprendiendo.

Además, la evaluación de los aprendizajes es un proceso pedagógico continuo, sistematico, participativo y flexible, que forma parte del proceso de enseñanza – aprendizaje (Diseño Curricular Básico Nacional, 2009).

La evaluación entendida como un proceso comprende las siguientes etapas: planificación de la evaluación, recojo y selección de información, interpretación y valoración de la información, comunicación de los resultados y toma de decisiones.

Por otro lado, para obtener evidencias de los desempeños de los alumnos, en un proceso de enseñanza y aprendizaje, es necesario usar técnicas e instrumentos de evaluación. Según Díaz Barriga (2002), las técnicas de evaluación pueden ser: informales (exploración durante las clases), semiformales (trabajos y ejercicios dentro del aula de clases, y tareas fuera del aula) y formales (pruebas y evaluaciones de desempeño). Entre los instrumentos se encuentran los portafolios, los mapas conceptuales, las pruebas o exámenes, listas de control, taxonomías, rúbricas, etc.

Evaluación cualitativa

La evaluación cualitativa es aquella donde se juzga o valora más la calidad tanto del proceso como el nivel de aprovechamiento alcanzado de los alumnos que resulta del proceso de enseñanza aprendizaje.

En la evaluación cualitativa, tal como lo señala Díaz (2001), lo fundamental es tomar en cuenta el proceso que siguen los participantes, más que el producto logrado por los mismos. Es decir, la intención de esta evaluación no se centra en la medición.

A continuación mostraremos dos instrumentos que nos permitirán evaluar el proceso de aprendizaje como son las taxonomías y las rúbricas para evaluar habilidades matemáticas.

Taxonomía para Matemáticas

Según Tristán (2006): "Una taxonomía es un modelo de clasificación que simplifica la categorización de los elementos o atributos que distinguen a cada uno de ellos" (p. 7).

Una taxonomía educativa es una herramienta de clasificación de los tipos de aprendizaje o de los procesos intelectuales, que ayuda a estudiar e identificar los procesos o las partes que ocurren en un aprendizaje, sabiendo que este ocurre de forma compleja, integrada y unificada (Tristán, 2006). Las taxonomías educativas pueden ser de dominio cognoscitivo, afectivo y psicomotor.

Una taxonomía educativa debe contar con tres elementos: una organización de acuerdo con un criterio de clasificación, definiciones precisas para cada elemento o categoría de la clasificación, lista de verbos activos para cada nivel y ejemplos de ítems o reactivos para contar con evidencias o indicadores que permitan verificar que un estudiante satisface los requerimientos de un nivel determinado.

Para la enseñanza - aprendizaje y la evaluación en Matemáticas se cuentan con algunas taxonomías específicas para esta área, como: la taxonomía de Freeman y Crow (1965), que organiza los conocimientos matemáticos en 6 categorías y 29 sub-categorías o ítems; la taxonomía especializada de Norman Gronlund (1969), que propone una clasificación en 6 categorías; la taxonomía de James W. Wilson (1971), basada en la taxonomía de Bloom, pero que incluye áreas y subáreas; la taxonomía SOLO de Lam y Foong (1996), que utiliza el modelo Rasch sobre un instrumento constituido por reactivos de grupo o conjunto de ítems "hijos"

derivados de una situación "padre"; la taxonomía MATH de Smith y Col (1996), basada en la taxonomía de Bloom, que mezcla 8 tipos de contenido y de conocimiento con un conjunto de 3 grupos de habilidades o capacidades; la taxonomía para las pruebas de Estado de Colombia, que se centra en evaluar tres competencias matemáticas; la taxonomía para matemáticas de Auger y Col (2000), basada en la taxonomía de Bloom y organizada en 4 categorías; y la taxonomía para Matemáticas de Regis Gras (2002), que consiste en una adaptación de la taxonomía de Bloom, organizada en 5 categorías.

Rúbricas para evaluar habilidades matemáticas

La rúbrica o matriz de valoración es un descriptor cualitativo que establece la naturaleza de un desempeño (Simón, 2001).

La rúbrica es una herramienta que facilita la calificación del desempeño de los estudiantes, en áreas que son complejas, imprecisas o subjetivas, a través de un conjunto de criterios graduados que permiten valorar el aprendizaje, los conocimientos o competencias logradas por el estudiante.

Las rúbricas se utilizan para múltiples y variadas actividades de aprendizaje, y pueden ser de dos tipos: comprehensiva, holística o global, y analítica.

Para diseñar una rúbrica es necesario considerar tres componentes:

- Producto esperado, que debe es un trabajo concreto, terminado y realizado por el estudiante, que puede ser evaluado. Por ejemplo: informe, proyecto, trabajo de investigación, etc.
- Aspectos a evaluar, referido a los elementos que debe contener el producto (introducción, desarrollo, conclusiones, bibliografía, etc.) determinando los indicadores de logro (originalidad, profundidad, claridad, capacidad de síntesis, etc.)
- Niveles de adquisición de las competencias, que permiten especificar las diferencias en cuanto a lo aprendido por el

estudiante (usando escalas: avanzado, excelente, destacado), evaluados mediante criterios desglosados de los indicadores con mayor detalle.

Para elaborar rúbricas podemos utilizar Rubistar, que es una herramienta gratuita para construir rúbricas en línea, disponible en: http://rubistar.4teachers.org

Rubistar ofrece:

- Plantillas de matrices para evaluar varios tipos de productos en distintas materias, como Matemáticas, Ciencias, Arte, Lectura, Escritura, Música, etc.
- La posibilidad de modificar esas plantillas, para adaptarlas a las necesidades particulares del profesor y de la situación.
- La ayuda a no partir de cero cuando necesita construir una matriz, aportándole ideas tanto en los aspectos o categorías, como en los criterios con los que estos se van a evaluar.

A continuación se muestra una rúbrica elaborada con Rubistar.

Rubric ID: 1278654
Find out how to make this rubric interactive

Matemáticas-Resolución de Problemas : matematica

CATEGORY	4	3	2	1
Expresiones matematicos	La explicación demuestra completo entendimiento del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra entendimiento sustancial del concepto matemático usado para resolver los problemas.	La explicación demuestra algún entendimiento del concepto matemático necesario para resolver los problemas.	La explicación demuestra un entendimiento muy limitado de los conceptos subyacentes necesarios para resolver problemas o no está escrita.
Razonamiento Matemático	Usa razonamiento matemático complejo y refinado.	Usa razonamiento matemático efectivo.	Alguna evidencia de razonamiento matemático.	Poca evidencia de razonamiento matemático.

La rúbrica permite que los estudiantes evalúen sus propios productos o resultados conociendo los criterios de calificación con que serán evaluados. Es decir, promueve la autoevaluación y heteroevaluación.

La rúbrica contribuye a que disminuya la subjetividad de los docentes al calificar el trabajo de sus estudiantes, mediante el

uso de una escala que mide las habilidades y desempeño de estos.

Evaluación cuantitativa

En esta parte revisaremos pruebas de opciones múltiples que incluyan un set de preguntas validadas previamente mediante los coeficientes de dificultad y discriminación.

Pruebas de Opciones Múltiples (POM)

Los objetivos son:

- Distinguir entre aquello que puede ser apropiadamente evaluado al usar ítems con opciones múltiples y aquello que deberá ser evaluado mediante algún otro método.
- Evaluar ítems de opciones múltiples usando criterios comúnmente aceptados para identificar fallas específicas en ellos.
- Mejorar ítems mal escritos mediante la corrección de los errores que contienen.
- Construir pruebas de opciones múltiples de alta calidad.

Anatomía de ítem de opciones

Un ítem típico consiste de dos partes básicas: un problema o texto de pregunta (**tallo)** y una lista de respuestas sugeridas **(alternativas u opciones).** El tallo puede ser de la forma de una pregunta o una frase incompleta, mientras que la lista de alternativas contiene una correcta **(respuesta)** y un número de incorrectas **(distractores).**

Ejemplo:

Tallo:
Cinco artesanos pueden tejer 12 chompas en 15 días. Si se requiere tejer 60 chompas en 25 días, ¿cuántos artesanos el doble de rápidos se deben contratar además de los ya contratados?

Alternativas:

A. 2 (Distractor) C. 5 (Respuesta)
B. 4 (Distractor) D. 8 (Distractor)

Tipos de aprendizaje de los estudiantes

Las preguntas de opciones múltiples pueden medir conocimientos (recordar –comprender), destrezas o habilidades. A continuación se muestra un ejemplo para cada caso:

Conocimiento – Recordar

El punto de intersección de las alturas trazadas desde los tres vértices de un triángulo se llama:

A. Baricentro. C. Incentro
B. Ortocentro D. Circuncentro

Conocimiento – Comprender

El ortocentro se encuentra en el exterior de un triángulo cuando el triángulo es:

A. Equilátero C. Obtusángulo
B. Rectángulo D. Isósceles

Destrezas

Calcular:

26/5+2/15+3/20+1

A. 389/60 C. 6
B. 383/60 D. 320

Habilidades

En un triángulo ABC, el ángulo < ABC=130°. Calcular el ángulo formado por las alturas trazadas desde los vértices A y C.

A. 130° C. 80 °
B. 50 ° D.100 °

Limitaciones de la POM

Dado que los estudiantes seleccionan una respuesta de una lista de posibles alternativas en lugar de suministrar o construir ellos mismos la respuesta, los exámenes del tipo de opciones múltiples no se adaptan a medir cierto tipo de logros de grados de aprendizaje, tales como la habilidad del estudiante para:

articular explicaciones, organizar ideas personales, realizar un gráfico, producir ideas originales y proporcionar ejemplos.

Pautas de elaboración

Pautas para el contenido

- Cada pregunta debe reflejar un contenido específico importante.
- Parafrasear para evitar la simple rememoración.
- Evitar un contenido demasiado específico.
- Evitar preguntas basadas en opiniones.
- Evitar preguntas capciosas.
- Vocabulario apropiado para cada grupo de estudiantes.

Pautas para el formateo

- Usar diversos tipos de preguntas POM en una misma prueba.
- Formatear la pregunta verticalmente en lugar de horizontalmente.

Pautas para el estilo

- Editar y corregir las preguntas.
- Usar gramática, puntuación, mayúsculas y ortografía correctas.
- Reducir al mínimo la cantidad de palabras en cada pregunta.

Pautas para la redacción del tallo

- Instrucciones claras y libres de ambigüedad.
- Evitar datos innecesarios y sinónimos dentro de la misma pregunta.
- Afirmar en lugar de negar y evitar palabras como No y EXCEPTO.
- Si se usan palabras negativas, deben ir en MAYÚSCULAS y en **negritas.**
- Evitar usar nombres de personas, productos, empresas reales.
- Colocar la referencia si se usan gráficos reales.

- El tallo debe poder responderse sin las opciones.
- Debe interrogar sobre una cuestión que posee una respuesta única y bien definida

Redacción de las opciones

- Se recomienda usar tres o cuatro opciones.
- Solo una debe ser la respuesta correcta.
- Variar el lugar de la opción correcta.
- Las opciones deben ser homogéneas en estructura gramatical y en extensión.
- La gramática de las opciones debe ser consistente con el tallo.
- Nunca usar como última opción NINGUNA DE LAS ANTERIORES.
- Evitar TODAS LAS OPCIONES ANTERIORES.
- Evitar opciones en negativo.
- Evitar pistas que indican la opción correcta.
- Evitar opciones evidentemente incorrectas.
- Evitar opciones en pares o tríos que identifican claramente la opción correcta.
- Usar como distractores: errores conceptuales comunes, resultados parciales y fallas habituales en los alumnos.
- Si una palabra o frase se repite en todas las alternativas, incluirlas en el tallo.
- Mantenga las alternativas mutuamente excluyentes.
- Considerar las unidades adecuadas.

Actividad:

Se presentan 10 preguntas para que los profesores detecten deficiencias y las corrijan de acuerdo a los criterios explicados. A continuación se muestran 2 de ellas.

PREGUNTAS
1. El impuesto sobre las remuneraciones es del 20% por los primeros $80 000 anuales y 25% sobre el exceso. ¿Cuánto gana anualmente un empleado que pagó un arancel de $46 000? A. 120 000 C. 180 000 B. 160 000 D. 200 000
2. Determine si las siguientes situaciones son aleatorias o determinísticas, respectivamente. I. Lanzar dos dados y obtener una suma mayor a 12 II. El próximo mamífero que vea por la calle será un perro. III. El resultado de sumar cinco más seis. IV. Lanzar una moneda y obtener cara. A. DDAA C. AAAA B. ADAA D. DADA

Referencias

Alves, E. & Acevedo, R. (2000). La *evaluación cualitativa. Orientación para la práctica en Aula.* Valencia: Cerined.

Cortada, N. (1999). *Teorías Psicométricas y Construcción de Tests*. Buenos Aires. Lugar Editorial.

Delgado, K. (1996). *Evaluación y Calidad de la Educación*. Bogotá. Coop. Editorial Magisterio.

Díaz, F. *et* al. (2001). Propuesta de evaluación para la 1 y 11 etapa de Educación Básica. *Educere*, *la Revista Venezolana de Educación, Investigación, 4,* 12, p. 319-327.

Díaz Barriga, F. & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista*. McGrawHill: México.

Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular del Perú (2009). 2da Edición. Recuperado el 10 de agosto de 2011, de: http://www.minedu.gob.pe/

Emslie, J. (2002): *Using Statistical Criteria to* Improve *Classroom Multiple-Choice Tests.* Toronto.

Flórez, R. (2003). Evaluación pedagógica y cognición. Colombia: Serie McGraw-Hill.

Haladyna, J. et al (1993). *Preparación de preguntas de opciones múltiples para medir el aprendizaje de los estudiantes*. OEI-Revista Iberoamericana de Educación (ISSN: 1681-5653). Recuperado el 04 de agosto, de: http://www.rieoei.org/deloslectores/267Haladyna.PDF

Ministerio de educación del Perú (2004). *Guía de evaluación del aprendizaje*. Recuperado el 15 de agosto de: http://es.scribd.com/doc/10979611/Guia-de-Evaluacion-EBR

Rubistar, herramienta para construir matrices de valoración. Recuperado el 05 de diciembre, de 2011 de: http://www.eduteka.org/Rubistar.php3

Rubistar. Crea esquemas para tu proyecto de actividades de aprendizaje. Recuperado el 05 de diciembre de 2011, de: http://rubistar.4teachers.org/index.php

Tristán, A. & Molgado, D. (2006). *Compendio de taxonomías. Clasificaciones para los aprendizajes de los dominios educativos*. México: Instituto de Evaluación e Ingeniería Avanzada S.C.

Tyler, A. (1959). *Tests and Measurments*. NY, Prentice Hall.

❖❖❖

Taller de resolución y elaboración de problemas no rutinarios de matemáticas (olimpiadas)

Emilio Gonzaga
Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana – Perú
egonzag@pucp.edu.pe

Jorge Tipe
Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana – Perú
jorgetipe@gmail.com

John Cuya
Comisión de Olimpiadas de la Sociedad Matemática Peruana, Perú
johncmasb@gmail.com

Resumen

El taller, orientado fundamentalmente a profesores de Educación Secundaria, tiene por objetivo contribuir a la formación matemática de los participantes a partir de reflexiones individuales y en grupo sobre la resolución y elaboración de problemas no rutinarios de matemáticas, de acuerdo a la siguiente modalidad: en base a una teoría mínima, se presentan fichas de trabajos individual y grupal, con versiones sencillas y de dificultad graduada de problema relativos a la teoría, para ser resuelta por los participantes bajo la asesoría de los profesores del taller; luego, se pide la exposición de los trabajos grupales, se hace el cierre del problema, explicando puntos importantes no contemplados por los grupos , integrando las ideas presentadas y solicitando sugerencias de generalización y/o modificación del enunciado de alguno de los problemas presentados.

Palabras clave: Problemas no rutinarios, resolución y elaboración de problemas, números polidivisibles, grafo.

Números polidivisibles

Recordemos los criterios de divisibilidad (en el sistema decimal) más usados en la resolución de problemas.

Criterio de divisibilidad por 2^n: Un número es divisible por 2^n si y solo si el número formado por los n últimos dígitos es divisible por 2^n.

Criterio de divisibilidad por 5^n: Un número es divisible por 5^n si y solo si el número formado por los n últimos dígitos es divisible por 5^n.

Criterio de divisibilidad por 3: Un número es divisible por 3 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Criterio de divisibilidad por 9: Un número es divisible por 9 si y solo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.

Criterio de divisibilidad por 11: Un número es divisible por 11 si y solo si la suma alternada de sus dígitos es divisible por 11. La suma alternada de un número $\overline{n_k n_{k-1} \cdots n_2 n_1}$ se define como:

$$n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + \cdots$$

Se presenta la definición de números polidivisibles, como una actividad complementaria al tema de Criterios de Divisibilidad, que es un tema frecuente en concursos y olimpiadas escolares.

Definición

Un entero positivo es llamado *polidivisible* si su representación decimal $\overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ tiene la siguiente propiedad: Para todo *j* entre 1 y *k*, inclusive, el número $\overline{a_1 a_2 \cdots a_j}$ es múltiplo de *j*.

Ejemplos

1) 2012 es polidivisible porque 2 es múltiplo de 1, 20 es múltiplo de 2, 201 es múltiplo de 3 y 2012 es múltiplo de 4.
2) 300000 es polidivisible pues 3 es múltiplo de 1, 30 es múltiplo de 2, 300 es múltiplo de 3, 3000 es múltiplo de 4, 30000 es múltiplo de 5 y 300000 es múltiplo de 6.

Hay muchas cuestiones que se pueden plantear acerca de números polidivisibles, y quizás algunas de ellas serían difíciles de responder. A continuación planteamos algunas de ellas, haciendo recordar al profesor que estos problemas le pueden

dar ideas para proponer problemas propios que puedan ser usados en clase.

FICHA DE TRABAJO Nº 1 (TRABAJO INDIVIDUAL)

Problema 1

a) ¿Es posible permutar los dígitos del número 1256 para obtener un número polidivisible?
b) ¿Es posible permutar los dígitos del número 23567 para obtener un número polidivisible?
c) ¿Es posible permutar los dígitos del número 12345 para obtener un número polidivisible?

Problema 2

¿Habrá algún número polidivisible que termine en 2214?

Solución del Problema 1

a) Supongamos que se pueda obtener el número polidivisible $\overline{abcd}$, entonces $\overline{abc}$ debe ser múltiplo de 3, con lo cual tenemos que $a+b+c$ es múltiplo de 3, y como $a+b+c+d=14$, entonces d es un múltiplo de 3 más 2 y como d es par, podemos tomar d=2. Como $\overline{cd}$ es múltiplo de 4, podemos tomar c=1 ó c=5. Luego de eso, podemos encontrar los números polidivisibles 5612 y 1652.
b) Sí, por ejemplo, podemos tomar el número 32765.
c) **[Problema propuesto en el Canguro Matemático 2011]** Sea $\overline{abcde}$ uno de los números que buscamos. Es claro que e = 5 y además, b y d son pares, por lo tanto, $\{b, d\} = \{2, 4\}$. Ahora, fijándonos en los números que faltan concluimos que $\{a, c\} = \{1, 3\}$, en particular, tenemos que $a+c = 4$.

   Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, es necesario que el número $a+b+c=(a+c)+b=4+b$ sea múltiplo de 3, y como b es 2 ó 4, concluimos que b = 2 y en consecuencia d = 4.
   Para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, es necesario que $\overline{cd} = \overline{c4}$ sea múltiplo de 4. Como c es 1 ó 3, lo anterior no es posible porque ni 14 ni 34 son múltiplos de 4. Por lo tanto, no se

puede formar un número polidivisible permutando los dígitos del número 12345.

Solución del Problema 2

Vamos a denotar al número que termina en 2214 simplemente con …2214. Supongamos que ese número tenga k dígitos. Como el número …221 es múltiplo de k-1 entonces k es par. Luego, el número …22 es múltiplo de k-2 y el número ….2214 es múltiplo de k. Como k es par, entonces alguno de los números k-2 ó k es múltiplo de 4. Por lo tanto, alguno de los números …22 ó …2214 es múltiplo de 4, que es falso por el criterio de divisibilidad por 4.

FICHA DE TRABAJO Nº 2 (TRABAJO GRUPAL)

Problema 3

a) Encuentre un número polidivisible de 6 dígitos (aparte del mostrado en el ejemplo).
b) Juan escribió en la pizarra un número polidivisible de 6 dígitos, demuestre que él puede escribir un dígito a la derecha de tal forma que el nuevo número de 7 dígitos sea polidivisible.
c) Pablo escribió en la pizarra un número polidivisible de 8 dígitos, demuestre que él puede escribir un dígito **no nulo** a la derecha de tal forma que el nuevo número de 9 dígitos sea polidivisible.

Problema 4

a) ¿Cuántos números polidivisibles de 2 dígitos hay?
b) ¿Cuántos números polidivisibles de 3 dígitos hay?
c) ¿Cuántos números polidivisibles de 4 dígitos hay?

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS

Solución del Problema 3

a) Hay varios números polidivisibles de 6 dígitos, por ejemplo: 102000, 507258, 660000, 900852, etc.

b) Sea $\overline{abcdef}$ el número polidivisible que escribió Juan. Consideremos los 7 números consecutivos: $\overline{abcdef0}$, $\overline{abcdef1}$, $\overline{abcdef2}$, $\overline{abcdef3}$, $\overline{abcdef4}$, $\overline{abcdef5}$, $\overline{abcdef6}$, entonces alguno de ellos es múltiplo de 7, ese número es un número polidivisible de 7 dígitos.

c) La solución es similar a la de la parte anterior, sólo que en vez de escribir los dígitos del 0 al 6 a la derecha, ahora escribimos los dígitos del 1 al 9 a la derecha.

Solución del Problema 4

a) Para que un número de la forma $\overline{ab}$ sea polidivisible sólo necesitamos que b sea par. Luego, el dígito a toma 9 valores (del 1 al 9) y el dígito b toma 5 valores (0, 2, 4, 6 u 8), por el principio de multiplicación hay 9×5=45 números polidivisibles de 2 dígitos.

b) Para que $\overline{abc}$ sea polidivisible necesitamos que b sea par y que $a+b+c$ sea múltiplo de 3. Comencemos notando que c toma 10 valores (del 0 al 9), b toma 5 valores y una vez que ya tenemos elegidos los dígitos b y c, el dígito a siempre tiene 3 posibilidades de ser elegido. En efecto: si $b+c$ es múltiplo de 3, a puede ser 3, 6 ó 9; si $b+c$ es múltiplo de 3 más 1, a puede ser 2, 5 ó 8; si $b+c$ es múltiplo de 3 más 2, a puede ser 1, 4 ó 7. Por el principio de multiplicación hay 10×5×3=150 números polidivisibles de 3 dígitos.

c) Esta solución es similar a la parte anterior. Para que $\overline{abcd}$ sea polidivisible necesitamos que b sea par, $a+b+c$ sea múltiplo de 3 y $\overline{cd}$ sea múltiplo de 4. Comenzamos notando que la pareja de dígitos $\overline{cd}$ se puede escoger de 25 formas (puede ser 00, 04, 08, … , 96), b toma 5 valores, y para que $a+b+c$ sea múltiplo de 3, hay 3 formas de escoger el dígito a (de forma similar a la solución anterior). Por el principio de multiplicación, hay 25×5×3=375 números polidivisibles de 4 dígitos.

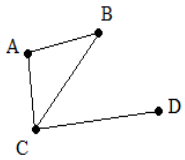
Comentarios finales

1) La cantidad de números polidivisibles es finita, específicamente, hay 20456 números polidivisibles en total. Aunque determinar esto es más adecuado con la ayuda de una computadora y conocimientos de programación.
2) Hay números polidivisibles que terminan en 2012 (como el mismo 2012, el año actual), ¿habrá números polidivisibles que terminen en 2013?, ¿en 2014?, ¿en 2015?, etc.
3) Un problema en matemática recreativa, que posiblemente dio origen a la definición de número polidivisible para tratar problemas similares, es el siguiente: ¿Será posible permutar los dígitos del número 123456789 para obtener un número polidivisible?
4) Le animamos a que usted mismo proponga problemas relacionados con números polidivisibles.

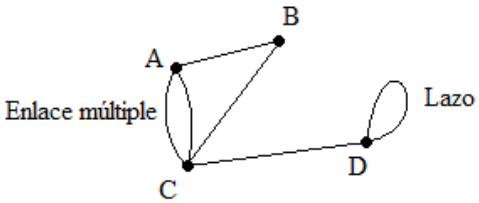
Introducción a los grafos

Definición.- Un *grafo (no dirigido)* es un conjunto de puntos y líneas, donde cada línea une dos puntos o sale y entra a un mismo punto. Los puntos son llamados *vértices* y las línea son llamadas *aristas* o *enlaces*.

Ejemplos



(1)



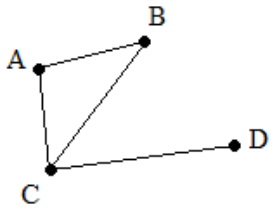
(2)

El grafo 1 puede representar la siguiente situación: Cuatro personas A, B, C y D están en una reunión en la cual A y B se conocen entre sí, B y C se conocen entre sí, A y C se conocen entre sí, y C y D se conocen entre sí.
Por otro lado, el grafo (2) puede representar la siguiente información: En una región con cuatro ciudades A, B, C y D, hay un camino que une A y B, hay dos caminos que unen A y C, hay un camino que une B y C, hay un camino que une C y D, y hay un camino que sale de D y termina en D.

Definiciones

1. Diremos que un grafo es *simple* si no posee enlaces múltiples ni lazos. Si no se dice nada sobre un grafo, consideraremos que es simple.
2. El *grado de un vértice A* de un grafo G es el número de aristas que salen de dicho vértice y lo denotaremos por |A|. El *grado del grafo G* es igual al número de vértices que posee y también lo denotaremos por |G|.

Por ejemplo en el grafo G siguiente



resulta |A| = 2, |B| = 2, |C| = 3, |D| = 1 y el grado del grafo es |G| = 4.

Para la solución de los problemas que se enuncian después, necesitamos las siguientes propiedades de los grafos.

Propiedad 1

En un grafo simple siempre hay dos vértices con el mismo grado.

Demostración

Sea G un grafo simple de grado n. El grado de cada vértice es como mínimo 0 (cuando no está enlazado con ningún otro) y como máximo n – 1 (cuando está enlazado con todos los demás), es decir toma n valores distintos (desde el 0 hasta el n - 1). Por otro lado, no puede haber un vértice de grado 0 y otro de grado n – 1 al mismo tiempo pues no puede haber un vértice que no está enlazado con ningún otro y al mismo tiempo un vértice que está enlazado con todos los demás.
Luego, el grado de cada vértice puede tomar sólo n – 1 valores y en total son n vértices, por lo tanto dos de esos vértices deben tener el mismo grado.

Propiedad 2

Sea G un grafo de vértices V_1, V_2,..., V_n, y sea k el número de aristas. Entonces se cumple $|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| = 2k$.

Demostración

El teorema es aplicación directa del siguiente hecho: Al sumar la cantidad de aristas que salen de V_1, la cantidad de aristas que salen de V_2,..., la cantidad de aristas que salen de V_n , cada arista (supongamos la que une los vértices V_i y V_j) es contada dos veces (cuando contamos las aristas que salen de V_i y las aristas que salen de V_j).

Propiedad 3

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

Demostración

Sea G un grafo simple y sean V_1, V_2,..., V_n sus vértices de grado par y sean W_1, W_2,..., W_m sus vértices de grado impar. Debemos probar que m es par.
Por el teorema anterior tenemos que

$$|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| + |W_1| + |W_2| + \cdots + |W_m| = 2k,$$

donde k es el número de aristas de G. Luego, como el grado de cada vértice V_i es par, entonces $|W_1| + |W_2| + \cdots + |W_m|$ es par. Como cada $|W_i|$ es impar, se sigue que m es par.

FICHA DE TRABAJO Nº 1 (TRABAJO INDIVIDUAL)

Problema 1

En un torneo de fútbol participan 9 equipos. Hasta el momento se han jugado 14 partidos. Demostrar que alguno de los equipos ha jugado por lo menos 4 partidos.

a) Al usar un grafo para representar la situación actual del torneo, ¿cuántos vértices y cuántas aristas tiene dicho grafo?
b) Enunciar el problema en términos de grafos y grados.
c) Resolver el problema usando propiedades de grafos.

Solución del problema 1

a) El grafo tiene 9 vértices y 14 aristas.
b) **Problema 1:** Un grafo de grado 9 tiene 14 aristas. Demostrar que existe un vértice de grado mayor o igual que 4.
c) Sean V_1, V_2,..., V_9 los vértices del grafo, entonces por el teorema se cumple

$$|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_9| = 28.$$

Sea V_r el vértice de mayor grado, entonces $9|V_r| \geq |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_9| = 28$, de donde $|V_r| > 3$, y como los grados son números enteros, entonces $|V_r| \geq 4$.

FICHA DE TRABAJO Nº 2 (TRABAJO GRUPAL)

Problema 2

Un país tiene 10 ciudades, algunas de ellas están unidas por caminos (no hay más de un camino uniendo dos ciudades). Se sabe que en total hay 28 caminos. El gobierno entrega 1 millón de dólares a cada ciudad por cada camino que salga de él. Probar que existen dos ciudades que recibieron juntas al menos 12 millones de dólares.

a) Enunciar el problema en términos de grafos.

b) Resolver el problema.
c) Demostrar además que con los datos es posible encontrar un ciclo de longitud 4.

NOTA: Un *ciclo* es una secuencia cerrada de aristas donde el final de cada arista coincide con el comienzo de la arista siguiente y no pasa dos veces por el mismo vértice.

Solución del problema 2

a) Un grafo de grado 10 tiene 28 aristas. Demostrar que existen dos vértices distintos cuya suma de grados es mayor o igual que 12.
b) Sean V_1, V_2,..., V_{10} los vértices del grafo, entonces por el teorema se cumple

$$|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_{10}| = 56.$$

Sean V_r y V_s los dos vértices de mayor grado, entonces $5(|V_r| + |V_s|) \geq |V_1| + |V_2| + \cdots + |V_{10}| = 56$, de donde $|V_r| + |V_s| > 11$, y como los grados son enteros, entonces $|V_r| + |V_s| \geq 12$.
c) Usaremos que existen dos vértices V_r y V_s tales que $|V_r| + |V_s| \geq 12$, es decir que esos dos vértices salen por lo menos 10 aristas hacia los otros 8 vértices restantes (descontamos 2 en el caso de que V_r y V_s están enlazados). Entonces V_r y V_s están enlazados ambos a 2 de los otros vértices A y B, entonces V_r, A, V_s, B forman un ciclo.

FICHA DE TRABAJO Nº 3 (TRABAJO GRUPAL)

Problema 3

En una reunión hay 10 personas, 6 de ellas tienen 8 conocidos en la reunión y las otras 4 sólo tienen 7 conocidos. Demostrar que existen 4 personas en la reunión que se conocen entre sí. (Suponer que si una persona A conoce a la persona B, entonces la persona B conoce a la persona A)

a) Enunciar el problema en términos de grafos.
b) Resolver el problema.

Solución del problema 3

a) En un grafo de grado 10, el grado de 6 vértices es 8 y el grado de los otros 4 vértices es 7. Demostrar que existen 4 vértices que están enlazados entre sí.
b) Sea A un vértice de grado 8 y sea B un vértice enlazado con A, donde $|B| \geq 7$, entonces hay por lo menos 5 vértices enlazados con A y B; sea C uno de ellos, donde $|C| \geq 7$, entonces hay por lo menos 2 vértices enlazados con A, B y C; sea D uno de estos. Luego, A, B, C, D están enlazados entre sí.

Referencias

Tipe Villanueva, J. , Espinoza Choquepura, C. & Cuya Barrios, J. (2011). VII Olimpiada Escolar de Matemáticas. Editorial Lumbreras, Lima, Perú.

Canguro Matemático. Recuperado el 05 de febrero de 2012, de: http://www.canguromat.org.es/canguro2011/ikg2011.html

Wikipedia: Número polidivisible. Recuperado el 05 de febrero de 2012, de: http://es.wikipedia.org/wiki/Número_polidivisible

❖❖❖

Las justificaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: experiencias con la divisibilidad

Estela Vallejo Vargas
Pontificia Universidad Católica del Perú
e.vallejo@pucp.edu.pe

Cristina La Plata de la Cruz
Pontificia Universidad Católica del Perú
cristina.laplata@pucp.edu.pe

Resumen

El propósito de este taller es mostrar a los profesores de educación primaria o secundaria – en ejercicio o en formación – las diferentes formas de inclusión de las justificaciones en sus clases de matemática y motivarlos a que las incluyan en su práctica docente, particularmente en el tema divisibilidad.

Palabras clave: argumentación, justificación, demostración, divisibilidad.

Introducción

Actualmente, aún es muy común ver presente en las clases de matemática – del nivel escolar – un estilo de enseñanza y aprendizaje bastante tradicional. Los estudiantes atienden las lecciones que sus profesores imparten de forma pasiva sin terminar de comprender cuál es la importancia de todo ello, acostumbrándose a repetir muchas veces "recetas" predeterminadas con la finalidad de resolver ejercicios o problemas, permaneciendo otras tantas con dudas o errores de concepto que, por vergüenza, temor o costumbre, no se atreven a consultar a sus profesores. Los alumnos se acostumbran a ver las matemáticas como un conjunto de fórmulas que ellos deben aprender de "memoria", perdiéndose para ellos el verdadero valor de las matemáticas. Quizá no nos habíamos dado cuenta que todo lo anteriormente mencionado, más allá de motivar a nuestros estudiantes a aprender y a hacer matemáticas, lo que se está finalmente logrando es

frustrarlos y hacer que ellos pierdan de vista el auténtico significado de esta ciencia.

Nuestra propuesta y motivación va justamente dirigida a romper con esta forma rutinaria de presentar las matemáticas e invitarlos a incluir las justificaciones en sus clases como una parte determinante en su enseñanza. ¿Y por qué las justificaciones? Pues, desde la propia experiencia de las investigadoras autoras de este taller, podemos decir que la inclusión de las justificaciones en las clases de matemática trae consigo innumerables resultados positivos. Entre ellos podemos mencionar una alta participación en clase, un efecto "refuerzo" para los temas tratados, conexiones con conocimientos anteriores, una reducida dependencia del profesor para la aclaración de sus dudas, planteamiento de conjeturas, una mejora progresiva en sus comunicaciones verbales y escritas manifestada a través de sus argumentos, seguridad en sus respuestas y así en sus conocimientos y por tanto en su persona, etc.

En National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010), se pone de manifiesto además que, es a través de las justificaciones que podemos medir el nivel de comprensión matemática alcanzado por nuestros estudiantes, teniendo en cuenta para ello la madurez matemática de los mismos. El que nuestros alumnos puedan comprender por qué cierta proposición matemática es cierta, comunicar sus argumentos o de dónde proviene una propiedad o fórmula serán indicadores del nivel de entendimiento logrado por ellos.

> One hallmark of mathematical understanding is the ability to justify, in a way appropriate to the student's mathematical maturity, *why* a particular mathematical statement is true or where a mathematical rule comes from. (p. 4)

A esto se suma el valor de la demostración matemática en el aula señalado por Martínez (2001), quien en su artículo de investigación nos dice:

> La utilidad formativa de la demostración matemática aparece como parte de una utilidad más general, la cual es aprender a razonar en matemática. A razonar de forma operativa, para resolver problemas, y para justificar el cumplimiento generalizado de las proposiciones matemáticas que usan en dichos procesos de resolución de problemas, lo que ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático inteligente, lógico y no solo funcional. (p. 38)

La tendencia curricular actual en muchos países, como Estados Unidos y Australia, reflejan el énfasis que están poniendo en desarrollar en sus estudiantes la habilidad de justificar sus propios razonamientos a través de sus propuestas. Esto se pone de manifiesto por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en Estados Unidos de América, así como el Australian Education Council en Australia que, como se manifiesta en Chick, McCrae y Vincent (2005), afirman que "Mathematical discoveries, conjectures, generalisations, counter-examples, refutations and proofs are all part of what it mean to do mathematics". Asimismo se establece que las matemáticas escolares deberían mostrar la naturaleza intuitiva y creativa de hacer matemáticas. E incluso, en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática elaborados por el NCTM, se plantea la formación de estudiantes que sean capaces de justificar sus procedimientos y razonamientos desde los primeros grados de educación escolar (inicial y los primeros grados de educación primaria, en nuestro caso). Esto ha sido así traducido en Martínez (2001),

> Durante estos años, el razonamiento matemático debe incluir todo tipo de pensamiento informal, conjeturas y validaciones que ayuden a los niños a darse cuenta de que las matemáticas tienen sentido…
>
> Debe intentarse que los niños justifiquen sus soluciones, sus procesos de pensamiento y sus conjeturas, y que además lo hagan de diversas formas. Los modelos manipulativos y otros modelos físicos les ayudan a

> relacionar los procedimientos y algoritmos con los hechos conceptuales que los apoyan y proporcionan objetos concretos a los que hacer referencia a la hora de explicar y justificar sus ideas… (p. 36)

Todo lo anteriormente señalado nos hace reflexionar respecto a la relevancia que se le está dando a las justificaciones, argumentaciones y demostraciones en el planteamiento de propuestas que busquen la formación de estudiantes reflexivos, críticos y racionales.

Es con este objetivo que decidimos dar el presente taller: plantear algunas formas concretas que usted puede emplear para incluir justificaciones en sus clases de matemática, particularmente para el tema divisibilidad.

Con este propósito indicamos a continuación cómo se pretende alcanzar este fin a lo largo de las dos sesiones de una hora y media cada una asignadas para este taller.

Sesión 1

1.1) Primero:

Empezaremos la sesión 1 aplicando un cuestionario a los profesores asistentes con el fin de poder determinar qué concepción tienen sobre las justificaciones. Asimismo, podremos precisar cuál es la relevancia que ellos le atribuyen y cómo responderían frente a una justificación dada por estudiantes de nivel escolar.

1.2) Segundo:

En seguida, en interacción con los participantes iniciaremos un conversatorio con el propósito de compartir "en voz alta" las ideas que estos tienen sobre las justificaciones y la importancia de su inclusión en sus clases.

1.3) Tercero:

A continuación, las autoras del taller, delimitaremos los términos que se emplearán a lo largo del taller teniendo en cuenta para este fin las referencias presentadas a continuación.

Argumentación

Respecto al término argumentación, tomaremos como referencia la definición presentada por el Diccionario de la Real Academia Española, el cual nos dice que una argumentación es la acción de argumentar. Mientras que argumentar significa aducir, alegar, poner argumentos. Y un argumento es un razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega.

Justificación

En cuanto al término justificación, consideraremos que una persona, considerando su nivel educativo, presenta una justificación matemática de alguna proposición si sus argumentos (en el sentido de la Real Academia Española) se encuentran en cualquiera de los tipos básicos de esquemas personales presentados en Martínez (2001, p. 33), y que son:

a) argumentación explicativa,
b) argumentación empírico-inductiva,
c) prueba deductiva informal y
d) demostración deductiva formal.

Los autores mencionados aclaran que:

a) Los esquemas de tipo "argumentación explicativa" son formas muy elementales de argumentación, que sirven a los sujetos para explicarse el significado de la proposición a demostrar a partir de su aplicación en algunos casos particulares (por ejemplo, entender el significado del teorema de Pitágoras, aplicándolo en algunos casos particulares). Verdaderamente no hay intención validativa, sino que la intención es esencialmente explicativa. A pesar

de ello, consideramos este tipo de argumentación como esquema personal de demostración, en primer lugar porque apareció en nuestro estudio como un esquema de respuesta de muchos estudiantes cuando se les pedía realizar una demostración, y, además, porque el elemento explicativo tiene sentido como primer eslabón del proceso demostrativo.

b) Los esquemas de tipo "argumentación empírico-inductiva" también se centran en el cumplimiento del correspondiente teorema en un conjunto de casos particulares, pero aquí la intención no es ya explicativa, sino que lo que se pretende es comprobar el cumplimiento *en general* de dicho teorema (lo que se reconoce por la utilización de variables genéricas, por la afirmación expresa de ese cumplimiento generalizado, etc.).
c) Los esquemas de tipo "prueba deductiva informal" corresponden a argumentaciones lógicas de tipo informal, apoyadas en analogías con otros modelos isomorfos, en la utilización de elementos gráficos, etc. Por ejemplo, muchas argumentaciones que suelen usarse en secundaria y en bachillerato para explicar las propiedades de las funciones de variable real, mediante el estudio de sus representaciones gráficas, las "curvas".
d) Los esquemas de tipo "demostración deductiva formal" corresponden a argumentaciones basadas en la potencia validativa del encadenamiento axiomático, pudiendo aparecer elementos intuitivos que ayudan a la demostración lógico-formal, pero que no la sustituyen.

Demostración matemática

Nuestra concepción de demostración matemática, será aquella dada por Knowless en Martínez (2001), en donde se define la demostración matemática en términos formalistas, como sigue:

> Una demostración en una teoría matemática es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales es o bien un axioma... o bien una proposición que ha sido derivada de

> los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Un teorema es una proposición así derivada por una demostración. (p. 30-31)

Desde nuestro punto de vista, el último de los esquemas vendría a ser el nivel más alto de justificación: la presentación de una demostración matemática, en el sentido de Knowless. Por consiguiente, una demostración, desde nuestra perspectiva, no es otra cosa que un tipo especial de justificación.

Vale la pena mencionar que, para cada esquema, las autoras del taller tenemos preparados ejemplos concretos que han sido debidamente seleccionados de libros de texto (del nivel secundaria) que se emplean en nuestro país, los que presentaremos a los profesores participantes. En algunos casos pediremos la intervención de los mismos para que determinen en cuál de los esquemas se encuentra los ejemplos tomados de estos libros.

1.4) Cuarto:

Compartiremos con los profesores asistentes aquellos puntos que han sido mencionados previamente como la importancia de la inclusión de las justificaciones. Antes de comunicar esto, pediremos su participación para averiguar cuál es la relevancia que ellos mismos le asignan a las justificaciones como parte de sus clases de matemática.

1.5) Quinto:

Mostraremos cómo se ve reflejada la inclusión de las justificaciones en una clase de matemática, a través de ejemplos concretos de justificaciones dadas por estudiantes del primer grado de secundaria para el tema divisibilidad en particular. Esto se hará con la finalidad de mostrar a los profesores asistentes que es posible que nuestros estudiantes lleguen a justificar de forma correcta, coherente y original.

Sesión 2

2.1) Primero:

Empezaremos mostrando una forma de incluir justificaciones en nuestras clases: desarrollaremos en forma activa uno de los cuatro juegos que se tienen preparados para el presente taller, con la participación tanto de los profesores asistentes como las conductoras del taller. A través de este juego presentaremos ejemplos de cuestiones especialmente diseñadas y/o seleccionadas relacionadas con la divisibilidad, que involucran a las justificaciones.

A continuación transcribimos el juego que fue tomado de Lages (1998, p. 8) y que se desarrollará empezando esta segunda sesión:

"Fútbol matemático"

Las reglas son:

- Divida la clase en dos grupos o "equipos".
- Escoja en cada equipo a un arquero (este debe ser escogido entre los mejores alumnos).
- Cada alumno de un equipo hace una pregunta a otro del equipo adversario. De responder éste, la bola sería rechazada, no sería gol y los papeles se invierten; quien respondió la pregunta hará otra al mismo alumno que le preguntó.
- Si una pregunta no fuese respondida, o si la respuesta fuese incorrecta (según el juez - profesor), esto significa que la bola pasará por la defensa e irá al arquero del equipo.
- Si el arquero no la responde, es gol. Pero quien hace la pregunta tiene que saber la respuesta correcta, si no el gol es anulado.

Se debe tener en cuenta que las preguntas que se harán entre ambos equipos son las cuestiones que el profesor previamente ha preparado y que tendrán que ser justificadas por sus estudiantes.

2.2) Segundo:

A continuación mostramos algunas de las cuestiones que serán empleadas para el juego anterior:

Cuestión 1: [Tomada de Silva (2007)]

Sabiendo que:

$4!$ significa $4 \times 3 \times 2 \times 1$

$5!$ significa $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Responde:

a) ¿Qué significa $8!$?
b) ¿ $5!$ es un número par?
c) ¿ $8!$ es múltiplo de 21?
d) ¿ $62!$ es un múltiplo de 37?
e) Pedro calculó $23!$
f) Sin calcular, determina la última cifra del resultado encontrado por Pedro.

Comentario: vale la pena mencionar que esta cuestión puede ser dividida en varias cuestiones diferentes a ser justificadas por sus estudiantes.

Cuestión 2:
Si multiplicas un número par cualquiera con un número impar cualquiera, ¿el producto (resultado) puede ser impar?

Cuestión 3:
Cuando sumas un múltiplo de dos cualquiera con un múltiplo de tres cualquiera, ¿el resultado es siempre un múltiplo de cinco?

Cuestión 4:
Si un número es divisible por 16, entonces ¿siempre será divisible por 8?

2.3) Tercero:

Posteriormente se mostrarán otras formas de presentar justificaciones en sus clases de matemática a través de las clasificaciones de actividades tomadas de Souza (2007). Para cada caso, hemos diseñado ejemplos concretos que serán mostrados a los profesores asistentes al taller. Souza considera los siguientes tipos de tareas:

a) Tareas de iniciación a la prueba. Las actividades llevan a "encontrar argumentos de varias naturalezas a favor o en contra de una conjetura". Esas actividades exigen producción de textos que son divididas en dos categorías:

   a. Enunciar o validar una conjetura: para que se tenga producción de pruebas próximas a la demostración, la actividad debe exigir la producción de un texto;
   b. Tareas de construcción en que es preciso deducir para ejecutar: El alumno debe trabajar en la construcción para que ocurra una reflexión.

b) Tareas para dar sentido a una frase. Las actividades son destinadas a llevar la comprensión del sentido de una frase, como por ejemplo:

   a. Preguntas con respuestas del tipo: verdadero y falso.
   b. Dos frases para decidir si quieren decir la misma cosa.
   c. Completar frases con palabras como "el, la, un, una, ciertos, algunos, ningún, todos, a veces, siempre, jamás".

c) Tareas sobre la utilización de palabras de conexión. Según el texto, "La estructura del texto de demostración es caracterizada por el uso de palabras y expresiones específicas". Para el dominio de esas palabras son sugeridas actividades como:

   a. Frases conteniendo "si…entonces" para verificar su veracidad.
   b. Entre las varias frases escritas con las palabras "porque", "como", "cuando" descubrir aquellas que son equivalentes.

c. Completar en los espacios en blanco con expresiones adecuadas en un texto de demostración.

d) Tareas para encontrar un encadenamiento deductivo. Se trata de "actividades que pretenden organizar propiedades en un encadenamiento deductivo". Ejemplos:

a. Reconstruir una demostración "puzzle".
b. Comparar cuadros del tipo "yo sé que", "conforme a la propiedad", "concluyo diciendo que", colocándolos en un encadenamiento lógico.
c. Construir planos de resolución de problemas.

e) Tareas para el aprendizaje de escritura. En este caso, el objetivo es favorecer la escritura de verdaderos textos de escritura matemática. Ejemplos:

a. Pedir al alumno que escriba una secuencia de acciones que realizó durante la resolución de un problema de matemática.
b. Tareas que se convierten en un dominio de enunciado; por ejemplo: colocar las letras en una figura a partir de un enunciado.
c. Escribir un programa de construcción de una figura para un tercero, que debe rehacerla a partir del texto. (p. 33-36) (Traducción propia)

2.4) Cuarto:

Finalmente se exhibirán los resultados previamente obtenidos de análisis realizados con la finalidad de mostrar la relevancia actual que se le da a las justificaciones en el Diseño Curricular Nacional (DCN, 2009) de la Educación Básica Regular de Perú y en algunos textos que se usan en la secundaria en nuestro país.

Referencias

Chick, H., McCrae, B. y Vincent, J. (2005). En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 281-288. Melbourne: PME.

Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular del Perú (2009). 2da Edición. Recuperado el 3 de mayo de 2011 de: http://www.minedu.gob.pe/

Ibañes, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

Lages, E. (1998). *Mi profesor de Matemática y otras historias*. Perú: Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA).

Martínez, A. (2002). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J. D. Godino (Eds.), *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27 – 43. Universidad de Almería.

National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington D.C. United States of America.

Porfirio, J. (2007). *Argumentação e prova na Matemática escolar do ensino básico: A suma das medidas dos ángulos internos de um triângulo.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

Silva, J. (2007). *Argumentação e prova: Análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

Souza, E. (2007). *Argumentação e prova no ensino medio: Análise de uma coleção didática de matemática*. Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica de São Paulo. Brasil.

❖❖❖

Discretizacion de regiones del plano (versión del libro de resúmenes)

Mariano González Ulloa
PUCP-Perú
mgonzal@pucp.edu.pe

Roy Sánchez Gutiérrez
PUCP-Perú
rwsanche@pucp.edu.pe

Resumen

En el taller se expone el procedimiento para particionar una región del plano mediante el algoritmo de triangulación de Delaunay, su implementación en Matlab y finalmente algunas aplicaciones de este proceso. Geométricamente significa la partición de una región del plano a partir de un número muy grande pero finito de puntos (una nube de puntos). Con dichos puntos se construye triángulos con una característica particular: que cada triángulo de la partición "tienda" hacia un triángulo equilátero. Esto se consigue cuando la circunferencia circunscrita a cada triángulo no contiene vértices de los triángulos contiguos (condición de Delaunay). Esta condición asegura que los ángulos interiores de los triángulos son lo más grandes posible. Esta forma de particionar una región plana tiene aplicaciones en la interpolación de datos, en la construcción de gráficas de superficies tridimensionales, como base en el método de elementos finitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, etc.

Una triangulación de Delaunay se puede caracterizar de la siguiente manera:

Sea $P = \{p_1, p_2,..., p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano, una triangulación de Delaunay de P satisface las siguientes propiedades:

- Tres puntos p_i, p_j y p_k de P son vértices de la misma cara de la triangulación de Delaunay de P, si y solo si, el círculo que

pasa por los puntos p_i, p_j y p_k no contiene puntos de P en su interior

- Dos puntos p_i y p_j pertenecientes a P forman un lado de la Triangulación de Delaunay de P, si y solamente si, existe un círculo que contiene a p_i y p_j en su circunferencia y no contiene en su interior ningún punto de P.

Palabras clave: Discretización, triángulos, circunferencia circunscrita, evaluación de funciones.

Referencias

Barber, C. B., D.P. Dobkin, and H.T. Huhdanpaa, The Quickhull Algorithm for Convex Hulls, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 22, No. 4, Dec. 1996, p. 469-483.

Gockenbach Mark. Understanding and Implementing the Finite Element Method. SIAM, Michigan Technological University, 2006. Los códigos en Matlab en http://www.math.mtu.edu/msgocken/fembook

Per-Olof Persson and Gilbert Strang. A simple mesh generator in Matlab. SIAM Review: 46: 329-345, 2004, http://math.mit.edu/persson/mesh

Su Peter and Robert L. Drysdale. A comparison of sequencial Delaunay *Triangulation algoritms*. Páginas 61-70. Vancouver Canada 1995.

Stanoyevitch A. *Introduction to Nunerical Ordinary and Partial Diferential Equations using Matlab*. Wiley Interscience. New Jersey 2005.

The MathWorks, *User's Guide: Partial Differential Equation*, Toolbox. USA 2002.

❖❖❖

Aprendiendo cálculo de funciones reales con apoyo de derive 6.0 (versión del libro de resúmenes)

Nélida Medina García
Pontificia Universidad Católica del Perú – Perú
nmedina@pucp.edu.pe

Miguel Gonzaga Ramírez
Pontificia Universidad Católica del Perú – Perú
mgonzag@pucp.edu.pe

Resumen

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, por consiguiente se hace necesaria una representación de ellos. Una herramienta didáctica de apoyo para desarrollar en forma eficiente el proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática en sus distintos niveles es usar un software matemático. Hemos elegido el programa matemático DERIVE por ser de fácil uso y por sus aplicaciones en la obtención de gráficas en dos y tres dimensiones, en la resolución de ecuaciones y en las aplicaciones al cálculo diferencial e integral facilitando la conversión entre los registros gráfico, tabular, algebraico y simbólico de un objeto matemático.

Los objetivos generales del Taller son: Reforzar y potenciar el aspecto cognitivo de los participantes dando énfasis a la rigurosidad de los conceptos y sus propiedades, al análisis e interpretación de resultados tanto teóricos como prácticos; Afianzar el aspecto metodológico, fomentando el empleo de las técnicas de información y comunicación aplicadas a la enseñanza de algunos temas del cálculo diferencial e integral de funciones reales, profundizando su análisis y desarrollando diversas aplicaciones con apoyo del Software matemático DERIVE 6.0.

Con apoyo de DERIVE 6.0 el participante: Visualizará sucesiones reales en las formas gráfica y tabular, analizará la convergencia de sucesiones definidas en forma explícita y en

forma recursiva y en el caso de sucesiones convergentes, calculará su límite y comprobará su resultado usando la definición; Graficará, hallará el dominio y rango de una función real dada; Hallará y graficará extensiones pares, impares, asíntotas de una función dada; Analizará gráfica y analíticamente la continuidad, monotonía, concavidad, puntos críticos, valores extremos de una función real de variable real dada; Estudiará gráfica y analíticamente el movimiento rectilíneo de una partícula, dada su función de posición; Calculará límites, derivadas, integrales de funciones reales de variable real dadas, interpretando y aplicando los Teoremas Fundamentales del Cálculo; Obtendrá Polinomios de Taylor de distintos grados de una función dada alrededor de un punto dado de abscisa, graficará en un mismo plano coordenado la función y sus Polinomios de Taylor remarcando su comportamiento alrededor de y usará dichos Polinomios para aproximar valores de la función dada cerca de a y estimará integrales definidas de funciones continuas a las cuales no se puede aplicar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo; Resolverá ecuaciones algebraicas y ecuaciones trascendentes; Graficará regiones planas limitadas por las gráficas de dos o más funciones reales y calculará su área.

Palabras clave: Funciones, sucesiones, límites, derivadas, integrales.

Referencias

Stewart, J. (2002). Cálculo: Trascendentes Tempranas. Thomson Learning. http://derive.en.softonic.com//

❖❖❖

Mathematica: pasando de las ideas a los resultados (versión del libro de resúmenes)

Mg. Luis Alberto Mayta Chua.
Pontificia Universidad Cátolica del Perú
lmayta@pucp.pe

Mg. Alfredo Velásquez.
Pontificia Universidad Cátolica del Perú
avelasquezf@pucp.edu.pe

Resumen

De acuerdo con Salazar (2009), Marioti (2002), en los últimos años la informática ha tenido un crecimiento notable y se ha introducido en la enseñanza para dar a los alumnos una formación más sólida utilizando esta como herramienta didáctica. Las aplicaciones didácticas normalmente consisten en programas diseñados especialmente con esta única finalidad y dedicados al estudio de un tema concreto. Actualmente se utilizan software, en la enseñanza universitaria y no universitaria, aprovechando su potencial a la hora de introducir al alumno en una diversidad de temas, y considerando que el conocimiento de tales herramientas es de utilidad para realizar estudios superiores o integrarse en el mundo laboral a un cierto nivel. Este taller pretende presentar la potencia y versatilidad del Software Mathematica y algunas de sus nuevas y atractivas funcionalidades. Todo esto se realizara a través de ejemplos simples a ejemplos más elaborados. La jornada se desarrollara en dos sesiones diferenciadas. En la primera sesión tendremos un desarrollo descriptivo de la herramienta y de las innovaciones incorporadas en la última versión del software, acompañado de ejemplos guiados donde podremos ir familiarizándonos con el software e ir comprobando por sí mismo las funcionalidades de Mathematica para el tratamiento de datos. En la segunda sesión el asistente podrá realizar animaciones y presentaciones útiles para la enseñanza del Cálculo diferencial. El taller está dirigido a profesores de enseñanza media y superior, sería recomendable más no indispensable que los

participantes tuvieran experiencia con alguna de las versiones de Mathematica u otros software.

Palabras clave: Mathematica, animaciones, enseñanza.

Referencias

Mathematica navigator*: graphics and methods of applied mathematics* Ruskeepä08ä08.

The Mathematica book Wolfram, Stephen (1996). *An introduction to programming with mathematica Gaylord*, Richard J. Kamin, Samuel N.; Wellin, Paul R. 1996.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. Tesis (Doctorado en Educación Matemática), Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Mariotti A. (2002) Technological advances in mathematics learning In: *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lynn English (ed.) (ch. 27, pp.695-723) Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum

❖❖❖

Lógica y Geometría dinámica: Su articulación para aprender a demostrar (versión del libro de resúmenes)

Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia
carmensamper@gmail.com

Patricia Perry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia
pperryc@yahoo.com.mx

Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia
ojmolina@pedagogica.edu.co

Armando Echeverry
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá – Colombia
aecheverri@pedagogica.edu.co

Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá - Colombia
lcamargo@pedagogica.edu.co

Resumen

En la actualidad se percibe más claramente la problemática compleja en la que está inmersa la construcción de demostraciones por parte de estudiantes de básica secundaria y universidad. Un aspecto que ha sido objeto de discusión entre los investigadores que se han preocupado por los procesos de enseñanza y aprendizaje de la demostración es el papel de la lógica matemática en ellos. Específicamente, varios estudios (e.g., Epp, 2003; Selden y Selden, 2009) se han ocupado de determinar cuáles son los temas que se deben incluir y los énfasis que se deben hacer en cursos cuya intención es apoyar a los estudiantes en su transición desde la matemática enfocada en lo procedimental a aquélla en la que la demostración juega un papel crucial. A ese respecto, la necesidad del estudio de la lógica matemática ha sido un asunto polémico.

Por otro lado, se reconoce ampliamente el potencial de la geometría dinámica para apoyar el aprendizaje de la demostración (Bartolini y Mariotti, 2008). Su uso para resolver tareas que buscan favorecer actividades matemáticas tales como la producción de conjeturas, el razonamiento argumentativo y la vinculación de éste con la producción de demostraciones matemáticas, apoya la participación real de los estudiantes en la actividad demostrativa.

El objetivo del cursillo es sensibilizar a los asistentes, profesores de secundaria y universitarios, con respecto al papel de la lógica matemática en el aprendizaje y la enseñanza de la demostración y de asuntos problemáticos asociados a ella que se evidencian en el desempeño de los estudiantes cuando construyen demostraciones en geometría plana. Proponemos a los asistentes desarrollar algunos problemas que ejemplifican las estrategias didácticas con las que buscamos apoyar el aprendizaje de la demostración, en las que la geometría dinámica juega un papel importante para abordar problemáticas asociadas a la lógica matemática.

Palabras clave: lógica matemática, geometría dinámica, aprender a demostrar

Referencias

Bartolini Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: *Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. En L.D. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (pp. 746-783). New York: Routledge.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53(1), 5-34.

Epp, S.S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly*, 110 (10), 886-899.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-3), 55-85.

Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. Tesis doctoral no publicada. University of Bristol, Graduate School of Education, UK.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo Editorial de Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2008). *Aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana con el apoyo de un programa de geometría dinámica*. Reporte de investigación no publicado. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Selden, J. y Selden, A. (2009). Understanding the proof construction process. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (vol. 2, pp. 196-201). Taipei: National Taiwan Normal University.

❖❖❖

REPORTES DE INVESTIGACIÓN

Uma análise semiótica do estudo da reta no espaço em Geometria Analítica

Cintia Rosa da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-Brasil
cintiarosa@gmail.com

Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-Brasil
saddoag@gmail.com

Resumo

Essa comunicação tem por objetivo apresentar uma análise do objeto matemático Reta no Espaço Tridimensional em Geometria Analítica por meio da semiótica de Charles Sanders Peirce. A semiótica de Peirce (1965a, 1965b, 1965c, 1972, 1980, 2003) procura descrever e classificar todos os signos admissíveis e se propõe a analisar e descrever, basicamente, a representação dos objetos, dos processos e dos phanerons, por meio de classes organizadas e de categorias, por exemplo, os signos envolvidos no estudo da Reta no espaço em Geometria Analítica, a equação geral e paramétrica da Reta, ou ainda, a representação gráfica de uma Reta num gráfico tridimensional e entre outros signos. Para Peirce (2003, p. 46) "*um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém*". Essa pesquisa é de cunho bibliográfico com procedimentos de análise qualitativa. Para dar conta disso, limita-se a um estudo do signo e das três tricotomias peircianas de maior relevância: signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante. Com essa pesquisa, conclui-se que a semiótica de Peirce descreve e classifica todos os signos de Reta no Espaço, bem como analisa e descreve a representação de seus objetos, de seus processos e dos seus fenômenos, por meio de classes e categorias.

Palavras chave: Reta, Geometria Analítica Espacial, Semiótica Peirceana.

Introdução

Esse trabalho tem o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e objetiva apresentar uma análise do objeto matemático Reta no Espaço Tridimensional em Geometria Analítica por meio da semiótica de Charles Sanders Peirce. A semiótica de Peirce (1965a, 1965b, 1965c, 1972, 1980, 2003) procura descrever e classificar todos os signos admissíveis e se propõe a analisar e descrever, basicamente, a representação dos objetos, dos processos e dos *phanerons*, por meio de classes organizadas e de categorias.
Peirce objetivou "*delinear os princípios fundamentais que subjazem aos métodos que são utilizados nas ciências*" (SANTAELLA, 2001, p. 31).

Para além do escopo da ciência, Peirce percebeu que a concepção de representação ou signo é fundamental para a arte, lei, mecânica, governo, religião, política, linguagem e entre outros campos. Em síntese, a concepção de representação ou signo é essencial às ações, emoções, pensamentos e percepções humanas.

Por exemplo, a palavra "reta" representa alguma coisa para o conceito na mente do indivíduo que a escuta; uma linha com uma única direção desenhada numa folha de papel representa uma reta para uma pessoa que tem a concepção de reta; um vetor representa o sentido de uma reta para um indivíduo que tem conhecimentos de vetores.

Para Peirce (2003, p. 46) "*um signo, ou representâmen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém*".
Essa pesquisa é de cunho bibliográfico com procedimentos de análise qualitativa. Para dar conta disso, essa pesquisa limita-se a um estudo do signo e das três tricotomias peircianas de maior relevância: signo em relação ao signo, signo em relação ao objeto e signo em relação ao interpretante.

Definição do Signo

Peirce fez dezenas de definições de signo, entretanto, segundo Santaella (2001, pp. 42-43), a que parece mais completa é a que segue:

> Um signo intenta representar, em parte, pelo menos, um objeto que é, portanto, num certo sentido, a causa ou determinante do signo, mesmo que o signo represente o objeto falsamente. Mas dizer que ele representa seu objeto implica que ele afete uma mente de tal modo que, de certa maneira, determina, naquela mente, algo que é mediatamente debido ao objeto. Essa deteminação da qual a causa imediata ou determinante é o signo e da qual a causa mediada é o objeto pode ser chamada de interpretante (CP 6.347).

Ao passo que os termos mencionados por Peirce podem causar equívocos, ressalta-se que signo, objeto e interpretante são termos técnicos, visto que o signo é constituído de uma relação triádica entre os três, e não pode funcionar como tal sem objeto e interpretante; assim como reta, representação gráfica de uma reta no espaço, equação vetorial da reta, equação reduzida da reta, e etc.; são termos técnicos de reta em matemática e não pode funcionar como tal sem conceito e alguém ou algo que o interprete.
Em resumo, Santaella (2001, p. 43) apresenta:

> (1) o signo é uma estrutura complexa de três elementos íntima e inseparavelmente interconectados: (1.1) fundamento, (1.2) objeto e (1.3) interpretante. (1.1) o fundamento é uma propriedade ou caráter ou aspecto do signo que o habilita a funcionar como tal. (1.2) o objeto é algo diferente do signo, algo que está fora do signo, um ausente que se torna mediatamente presente a um possível intérprete graças à mediação do signo. (1.3) o interpretante é um signo adicional, resultado do efeito que o signo produz em uma mente interpretativa, não necessariamente humana, uma máquina, por exemplo, ou uma célula interpretam sinais. O interpretante não é qualquer signo, mas um signo que interpreta o fundamento. Através dessa interpretação o fundamento revela algo sobre o objeto ausente, objeto que está fora e existe independente do signo.

Nesse contexto, veja-se como toda abstração apresentada por Santaella pode ser concretizada por meio de um exemplo específico: uma linha com uma única direção desenhada numa folha de papel é um signo de reta. Entretanto, observa-se: uma linha com uma única direção desenhada numa folha de papel está habilitada a funcionar como signo de reta, porém somente funciona assim caso seja interpretado. Isso porque sem um interpretante, uma linha com uma única direção desenhada numa folha de papel é um rabisco, um risco. Dessa forma, esse complexo mental só se torna uma reta caso seja interpretado como uma reta por meio de hábitos escolares, científicos, convencionais. Haja vista, "*sem isso, ele é apenas um signo virtual, possível e passível de se atualizar como signo tão logo ele encontre um intérprete*" (SANTAELLA, 2001, p. 44).

As classificações dos signos

Estão fundamentadas nos três componentes do signo, fundamento, objeto e interpretante, todas as tríades classificatórias.

Há três classes gerais de fundamentos as quais reaparecem as três categorias, que são: a) qualidade; b) existente; e c) lei. Essas classes de fundamento conduzem a primeira e ampla divisão dos signos. Podem-se ilustrar as classes em questão da seguinte maneira: a) as formas contidas numa representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional; b) a representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional, ou a representação de retas paralelas aos eixos coordenados que tenho diante dos meus olhos, aqui e agora; e c) as equações paramétrica, vetorial, geral, simétrica e reduzida da reta que definem a representação gráfica da reta no espaço tridimensional.

Segundo Peirce (2003, p. 51),

> os signos são divisíveis conforme três tricotomías, a primeira, conforme o signo em si mesmo for uma mera qualidade, um existente concreto ou uma lei geral; a segunda, conforme a relação do signo para com o objeto consistir no fato de o signo ter algum caráter em si

> mesmo, ou manter alguma relação existencial com ese objeto ou em sua relação com um interpretante; a terceira, conforme seu Interpretante representá-lo como um signo de possibilidade ou como um signo de fato ou como um signo de razão.

Desse modo, na relação do signo com ele mesmo o signo pode ser: a) um quali-signo; b) um sin-signo; e c) um legi-signo. A saber, a) é uma simples qualidade de um determinado signo, por exemplo, o sentimento que abarca um indivíduo quando está diante de uma representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional, de uma equação paramétrica da mesma reta; para Peirce (1965a, p. 142), "*a Qualisign is a quality which is a Sign. It cannot actually act as a sign until it is embodied; but the embodiment has nothing to do with its character as a sign*" [1]; b) é um existente, algo concreto que é um signo, por exemplo, um gráfico de uma reta no espaço, ou a representação gráfica de duas retas ortogonais, ou a representação gráfica de duas retas paralelas aos planos coordenados, ou a representação gráfica de uma reta ortogonal a duas retas que vejo, aqui e agora, ou ainda uma equação da reta escrita numa folha de papel; para Peirce (1965a, p. 142) "*is an actual existent thing or event which is a sign*" [2]; e c) é alguma coisa que possui o caráter de uma lei que governa acontecimentos particulares, quer dizer, é alguma coisa de natureza geral, por exemplo, uma equação geral, uma equação paramétrica, uma equação reduzida, uma equação simétrica, uma equação vetorial da reta que representam um gráfico de uma reta no espaço tridimensional.

Ainda mais, na relação do signo com seu objeto dinâmico, quer dizer, com aquela coisa que seu objeto imediato sugere, retomam-se as categorias atreladas ao fundamento, uma vez que somente a) qualidades podem sugerir; b) existentes

[1] Um Qualisigno é uma qualidade que é um signo. Não pode realmente atuar como um signo até que seja incorporada, mas a personificação não tem nada a ver com seu caráter como signo (tradução nossa).

[2] É uma coisa real existente ou evento que é um signo (tradução nossa).

podem indicar; e c) leis podem representar. É da tríade apresentada que se origina a segunda e ampla divisão dos signos.

Peirce (1965a, p. 143) afirma que "*according to the second trichotomy, a Sign may be termed an Icon, an Index, or a Symbol*". Além disso, Peirce define: a) ícone como um signo que faz referência a um objeto, cujo significado é dado simplesmente em função dos caracteres próprios e que possui, assim como um objeto que existe realmente ou não; b) índice é um signo que faz referência a um objeto que significa em função de ser afetado pelo mesmo; e c) símbolo é um signo que faz referência a um objeto que significa em função de uma lei, ou seja, é uma associação de ideias gerais.

Para exemplificar esta divisão dos signos, considera-se a) alegria sendo sugerida por um indivíduo que aprendeu a esboçar um gráfico tridimensional de uma reta; b) os recursos que um indivíduo utiliza ao esboçar um gráfico de uma reta no espaço tridimensional indica que o aluno sabe tratar o assunto ou representá-lo; e c) a mudança da representação gráfica de uma reta no espaço tridimensional numa equação paramétrica, vetorial, geral, reduzida, simétrica da reta realizada por um indivíduo é uma lei para o aprendizado de reta em Geometria Analítica.

Por fim, trata-se da relação do signo com os interpretantes, que podem ser gerados, compostos pela tríade: a) rema; b) dicente; e c) argumento. A saber, a) é uma conjectura ou hipótese, por exemplo, vejo uma representação gráfica de longe e sugiro que seja de uma reta no espaço tridimencional; b) é uma proposição equivalente à comprovação de conexão física e existência, por exemplo, um aluno representa uma equação geral de uma determinada reta no instante que o professor explica as definições de equação geral da reta; e c) é uma série lógica de premissas e conclusão.

Conclusão

Com base no que foi exposto, os estudos apresentam uma análise do objeto matemático Reta no Espaço Tridimensional em Geometria Analítica por meio da semiótica de Charles Sanders Peirce.

A semiótica de Peirce descreve e classifica todos os signos de Reta no Espaço e analisa e descreve, fundamentalmente, a representação de seus objetos, de seus processos e dos seus fenômenos, por meio das classes organizadas e das categorias, uma vez que toda teoria apresentada foi exemplificada por meio do objeto matemático colocado em questão.

Referencias

Peirce, C. S. & frege, G. (1980). Escritos coligidos. 2 ed. São Paulo: Abril Cultural.

Peirce, C. S. (1972). Semiótica e filosofia. São Paulo: Cultrix.

Peirce, C. S. (2003). Semiótica. 3. ed. São Paulo: Perspectiva.

Peirce, C. S. (1965a). Collected papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press. V. 1-2.

Peirce, C. S. (1965b). Collected papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press. V. 3-4.

Peirce, C. S. (1965c). Collected papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Mass: Belknap Press of Harvard University Press. V. 5-6.

Santaella, L. (2001). Matrizes da Linguagem e Pensamento: sonora, visual, verbal, aplicações na hipermídia. São Paulo: Iluminuras.

❖❖❖

Un estudio, desde el enfoque lógico semiotico, de las dificultades de alumnos del tercer año de secundaria en relación a los polinomios

Ana Karina Delgado Bolivar
Pontificia Unviersidad Católica del Perú
delgado.ak@pucp.edu.pe

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Unviersidad Católica del Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo de investigación muestra una clasificación de los errores que frecuentemente cometen los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios; así como el análisis de las posibles causas que los originan. Se analizan los aspectos más relevantes sobre las dificultades y errores que presentan los alumnos al realizar operaciones con polinomios, desde el marco teórico del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), describiendo el esquema teórico que se utiliza y las técnicas de análisis para interpretar los resultados.

Palabras clave: Dificultades, errores, polinomios, enfoque lógico semiótico.

Introducción

En nuestra actividad pedagógica encontramos dificultades y errores que nuestros alumnos evidencian en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Muchas veces estos errores pasan desapercibidos y no siempre se indaga por las causas que los originaron. Sin embargo, conocer la naturaleza de los errores que cometen nuestros alumnos, nos permitirá diseñar estrategias que provean al alumno de herramientas para superar estas dificultades y acceder al nuevo conocimiento matemático.

Según Rico (1995) todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores. Por tanto, resulta favorable conocer los errores de nuestros alumnos para así poder modificar el tratamiento de los conocimientos que generan estos errores.

Problema de investigación

En esta investigación se realizó un estudio sobre la clasificación de los errores cometidos por los alumnos del tercer año de secundaria en el tratamiento de polinomios, analizando y estableciendo sus posibles causas. Este tratamiento involucro operaciones de adición, sustracción y multiplicación de polinomios.

Este trabajo responderá a las siguientes preguntas de investigación: ¿qué tipos de errores cometen con frecuencia los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios? y ¿cuáles son las posibles causas de los errores frecuentes que cometen los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios?

Objetivos de investigación

Los objetivos de esta investigación fueron:

- Clasificar los errores, según la clasificación propuesta por Socas (1997), cometidos por los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios identificando las posibles causas que originan estos errores.
- Analizar los errores que cometen con frecuencia los alumnos del tercer año de educación secundaria en el tratamiento de polinomios, a partir de los resultados obtenidos después de la aplicación del cuestionario y de la entrevista, identificando algunas causas posibles que los originan.

Marco teórico

Este trabajo se desarrolla dentro del marco teórico del Enfoque Lógico Semiotico (ELOS) propuesto por Socas (1997), quien aborda las dificultades y los errores que se presentan en la construcción del lenguaje algebraico. Cabe mencionar que este marco teórico está en construcción, según lo señala el mismo Socas (2007).

Socas (1997) manifiesta que es importante para el profesor tener conocimiento acerca de los errores más frecuentes que cometen los alumnos al realizar operaciones en Matemática, porque así se conocen los procedimientos que utilizan los alumnos al resolver los ejercicios.

Este enfoque se encuentra dentro del programa cognitivo y trata de elaborar dos modelos de competencia: formal y cognitivo, que aporten supuestos básicos para poder interpretar los fenómenos de estudio en educación matemática.

En esta investigación se hace un análisis de los errores algebraicos tomando el modelo de competencia cognitivo del Enfoque Lógico Semiótico, a través de dos componentes: las dificultades y errores, y los estadios de desarrollo, que permiten identificar las posibles causas de los errores cometidos por los alumnos.

Los errores, según Socas (1997), se clasifican en dos ejes: errores que tienen origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de sentido. El primero se divide en errores de necesidad de clausura y errores de concatenación; y el segundo, se divide en errores que tienen origen en la aritmética y errores de procedimiento.

Los estadios de desarrollo permiten identificar el nivel de comprensión del alumno. Estos estadios se organizan, en tres etapas: el semiótico, donde el alumno aprende y usa los nuevos signos con los significados que le suministran los signos antiguos ya conocidos; el estructural, donde se recurre a la observación de regularidades y comportamientos de patrones

para dotarlos de significado; y el autónomo, donde los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior.

En este trabajo de investigación se han considerado solo dos estadios de desarrollo: el semiótico y el estructural.

Metodología

La metodología utilizada en la investigación fue de tipo cualitativa y estuvo diseñada en cuatro fases: planificación, aplicación, análisis y resultados. Los instrumentos que se utilizaron para recoger la información fueron: cuestionarios, guías de repaso y entrevistas.

Los cuestionarios fueron elaborados teniendo en cuenta la clasificación de Socas (1997) con preguntas abiertas, lo que permitió conocer los procedimientos algebraicos utilizados por los alumnos en el desarrollo de los ejercicios.

A continuación se muestra algunas preguntas del cuestionario:

Pregunta 1: Reduce $\frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x$

El objetivo de esta pregunta fue determinar errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, relacionados con las operaciones con fracciones.

Pregunta 3: ¿Es correcto $(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 4y^2$?

El objetivo de esta pregunta fue determinar errores de procedimiento relacionados con la propiedad de linealidad.

Los cuestionarios se aplicaron a 34 alumnos del tercer año de secundaria de la institución educativa pública "San Luis María Monfort" del distrito de Ate-Vitarte.

La entrevista permitio reconocer la comprensión de los alumnos en dos estadios de desarrollo: semiótico y estructural.

La entrevista se aplico a dos alumnas, con la finalidad de indagar sobre las causas de los errores que se detectaron en los cuestionarios. Por ejemplo, para indagar sobre las causas

que originaron los errores que se presentaron en la pregunta 2 del cuestionario, se les pregunto lo siguiente:

a) Suma $\frac{5}{3}+\frac{3}{7}$

b) Suma $\frac{5x}{3}+\frac{3x}{7}$

Algunos resultados

Del cuestionario exploratorio se obtuvieron los siguientes resultados:

Pregunta	Tipo de errores	Eje	Nº de alumn.	%
Pregunta 1	Concatenación.	Errores que tienen origen en un obstáculo.	00	00,00%
Pregunta 2	Errores que tienen su origen en la aritmética (relacionados a las fracciones).	Errores que tienen origen en una ausencia de sentido.	03	9,38%
Pregunta 3	Errores de procedimiento (relacionados al uso inadecuado de linealidad).	Errores que tienen origen en una ausencia de sentido.	11	34,37%
Pregunta 4	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis cuando le antecede el signo negativo).	Errores que tienen origen en una ausencia de sentido.	05	15,63%
Pregunta 5	Necesidad de clausura.	Errores que tienen origen en un obstáculo	09	28,13%
Pregunta 6	Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética (relacionado al uso inadecuado del paréntesis).	Errores que tienen origen en una ausencia de sentido.	00	00,00%

Como podemos observar, los errores más frecuentes son: el error de procedimiento, relacionado al uso inadecuado de linealidad, cometiendo el siguiente error: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; y el error de necesidad de clausura al no identificar los términos semejantes, obteniendo el siguiente resultado $10y + 2 = 12y$.

Para ubicar la comprensión de los alumnos en los estadios de desarrollo luego de la entrevista, se tomo en cuenta la siguiente descripción:

Estadio de desarrollo	**Descripción**	**Errores que identifican cada etapa**
Sistema antiguo	Esta etapa no es considerada estadio. Aquí el alumno presenta errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética y por lo tanto, no puede acceder al estadio semiótico.	Ejemplo de **errore**s del álgebra que **tienen su origen en la aritmética**: a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x+y}$ b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1+1}{x+y}$ c) $-(x+y)=-x+y$
1er Estadio: Estadio semiótico	Si el alumno presenta ausencia de errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, entonces diremos que la comprensión matemática del alumno se ubica en el estadio semiótico.	Ejemplo de **errores de procedimiento:** a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ b) $x(y \cdot z) = \mathrm{x} \cdot \mathrm{y} \cdot \mathrm{x} \cdot \mathrm{z}$
2do Estadio: Estadio estructural	Si el alumno presenta ausencia de errores de procedimiento, entonces diremos que el alumno se ubica en el estadio estructural.	Ausencia de errores de procedimiento.

Como podemos observar, los errores no situan al alumno en un estadio determinado, sino la ausencia de dificultades y errores

son las que lo hacen. Sin embargo, la presencia de dificultades y errores en un determinado tipo de actividades propias de un estadio, lo ubica para esas actividades en el estadío anterior (Socas, 2010, pp 2).

Conclusiones

Esta investigación, nos permite afirmar que la clasificación de errores elaborada por Socas (1997) se encuentra vigente pues los resultados de los cuestionarios muestran que los alumnos cometen los tipos de errores señalados por Socas. Entre ellos se encuentran: la necesidad de clausura, cuyo origen está en la necesidad que tiene el alumno de cerrar un enunciado incompleto; errores del álgebra con origen en la aritmética, cuya causa está en el uso inadecuado de la ley de signos de la multiplicación o en las dificultades de las operaciones con fracciones; y errores de procedimiento, cuyo origen está en el uso inadecuado de la propiedad de linealidad.

La entrevista permitió ubicar la comprensión de los alumnos en dos estadios de desarrollo: semiótico y el estructural teniendo en cuenta la clasificación de Socas (1997). También se alcanzó un análisis más fino y puntual de las posibles causas de los errores.

Referencias

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Recuperado el 29 de mayo del 2011 desde http://funes.uniandes.edu.co/486/

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154) Barcelona: Horsori. Recuperado el 18 de junio de 2010 de cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática X*I,

Séptimo *Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), 19-52

Socas, M. M. (5 de noviembre, 2010). *Respuesta al cuestionario enviado por la tesista.* Mensaje enviado a https://correo.pucp.edu.pe/read.php?sec=11&msgno=2281&folder=INBOX&first=0&lugar=7&pagina=&sesion=0804201120272707f154bcd94a302fa36616e1b5aa71d9&prioridad=3

❖❖❖

Análisis del tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Colegio SS.CC Recoleta - Perú
myrianluz@hotmail.com

Resumen

El presente reporte de investigación analiza el tratamiento que se da al álgebra en el primer año de secundaria.

La investigación es de tipo cualitativo y utiliza como marco teórico fundamental la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El estudio fue realizado con 63 estudiantes del primer año de secundaria de un colegio privado en la ciudad de Lima.

La investigación describe y analiza las diferentes organizaciones matemáticas y didácticas presentes en libros de textos y programas curriculares, además de incluir una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica.

En este contexto, la investigación describe y analiza si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado. Además, pretende mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente. Luego de este análisis, se propone un modelo didáctico alternativo en el que se considerará la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas.

Palabras clave: teoría antropológica de lo didáctico (TAD), álgebra, modelización, praxeologías.

Introducción

El actual Diseño Curricular de Educación Básica del Perú considera que los estudiantes del primer año de educación

secundaria identifican patrones numéricos, los generalizan y simbolizan; representan de diversas formas la dependencia funcional entre variables: verbal, tablas, gráficos, etc; y resuelven problemas de traducción simple y compleja que involucran ecuaciones lineales con una incógnita.

Consideramos que el logro de estas capacidades debe darse a la par que se consigue un nivel de abstracción a través de actividades de clase, en donde el tratamiento matemático y didáctico del dominio de investigación "álgebra" lleve a la generalización y modelización.

Nuestra realidad muestra que los estudiantes poseen marcadas carencias en la interpretación y el uso del dominio de investigación "álgebra". Creemos que la mayoría de nuestros alumnos aprenden a operar expresiones algebraicas y resolver ecuaciones de primer grado con un marcado énfasis algorítmico, sin buscar relacionarlos con procesos de modelación o acercarlos a formas de pensamiento matemático de tipo inductivo, argumentativo, conjetural o demostrativo.

Desde una concepción del quehacer matemático como la Teoría Antropológica de lo Didáctico, se suministran las herramientas de análisis matemático y didáctico necesarias para reconstruir una posible evolución del dominio de investigación "álgebra" en el primer año de secundaria del Perú.

Así, se pretende mostrar cómo se inicia el estudio del álgebra en el primer año de secundaria en el Perú, a través del análisis de sus diferentes organizaciones matemáticas y didácticas en libros de textos y programas curriculares, además de una entrevista estructurada a los docentes sobre su práctica pedagógica. Luego, se propondrá un modelo didáctico alternativo en el que se considerará la introducción de los temas algebraicos a través de tipos de problemas de complejidad creciente, utilizados esencialmente como instrumentos de modelización.

Objetivos de la investigación

Objetivos generales

1. Analizar si el tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria corresponde a un proceso de algebrización y si la modelización está presente en el proceso de instrucción estudiado.
2. Mostrar que el álgebra puede surgir como instrumento para modelizar y resolver situaciones específicas de complejidad creciente.

Objetivos específicos

- Analizar los lineamientos curriculares propuestos en el DCN (Diseño curricular nacional) respecto al tratamiento del álgebra escolar.
- Analizar si los tipos de tareas y técnicas propuestos en los libros de texto y actividades de clase son pertinentes para el estudio de temas algebraicos.
- Identificar la tecnología dominante en los libros de texto y actividades de clase respecto al estudio del álgebra.
- Identificar las condiciones y restricciones de origen didáctico y matemático que dificultan el proceso de estudio del álgebra.
- Diseñar una organización didáctica pertinente para el estudio introductorio del álgebra, integrando los diferentes momentos de su proceso de estudio, basados en el principio de que el álgebra escolar debe aparecer para atender a la necesidad de resolver situaciones específicas.

Marco Teórico

En la presente investigación se empleará como marco teórico fundamental la teoría de transposición didáctica y la teoría antropológica de lo didáctico, propuestas por Chevallard (1999); además, de algunos aportes del enfoque ontosemiótico

de la instrucción y la cognición matemática (EOS) de Godino, Font y Wilhelmi (2006).

Estas teorías nos brindaran herramientas de análisis que nos permitirán caracterizar la serie de transformaciones a las que son sometidos los conocimientos algebraicos al pasar de una institución a otra, resaltar el papel de las instituciones en un sistema didáctico y analizar la idoneidad didáctica de un proceso de estudio para mejorar su funcionamiento.

Metodología

Según la estrategia de investigación aplicada, la metodología de trabajo será cualitativa de tipo etnográfico.

La investigación etnográfica constituye la descripción y el análisis de un campo social específico. Su meta principal es captar el punto de vista, las motivaciones y expectativas que los actores otorgan a sus propias acciones sociales. El comportamiento social involucra diversos grados y niveles de observación participante, esta permite a su vez confrontar lo que la gente dice de lo que hace, y distinguir la norma de la práctica real. La relevancia de este tipo de investigación es que permite ver muchos aspectos subjetivos que difícilmente se cuantifican o miden objetivamente.

En el siguiente cuadro mostramos la correlación que hay entre la etnografía y la TAD como metodología de investigación:

Tabla 1: Correlación entre la etnografía y la TAD.		
Indicadores	**Etnográfico**	**TAD**
La naturaleza del proceso de investigación	Estudio de los contextos, énfasis en la ocurrencia de los procesos y cambios naturales. Tiene en cuenta el carácter evolutivo del estudio.	El estudio incluye el análisis de las praxeologías matemáticas y didácticas presentes en la institución escolar (tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías), en relación al dominio de investigación tratamiento del álgebra escolar.
Métodos de recolección de datos.	Observación participante, entrevistas no estructuradas, colecciones de documentos, interacción discursiva y contrastación de opiniones de los miembros.	Entrevista estructurada. Observaciones de carácter no participante recopilando los datos en video, audio y registros escritos. Análisis de los materiales teóricos y prácticos que se ofrecen a los estudiantes (libros de texto). Análisis del programa analítico con los contenidos por unidad.
Sobre la muestra de investigación	Estudio de un reducido número de casos.	La muestra de investigación corresponde a dos aulas de 35 alumnos cada una del primer año de secundaria.
Métodos de análisis de datos.	Se conoce los resultados de investigaciones y teorías paralelas que pueden ayudar en la interpretación y comprensión, se comparan los hallazgos con los de otros investigadores para corroborarlos o *contrastarlos* con los mismos. Descripción sistemática de las características que tienen las variables de los fenómenos en juego, de la codificación y formación de categorías conceptuales, del descubrimiento y validación de asociaciones entre los fenómenos, de la comparación de construcciones lógicas y postulados que emergen de los fenómenos de un ambiente con otros de ambientes o situaciones similares.	Interpretación y explicación de los significados en cada una de las praxeologías analizadas, considerando las investigaciones previas de la TAD y, algunas herramientas de análisis del enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática.

Resultados

El tratamiento del álgebra en el primer año de secundaria no corresponde a un proceso de algebrización y la modelización está ausente en el proceso de instrucción estudiado.

La problemática detectada es que los contenidos se presentan aislados, mayormente se utilizan técnicas algorítmicas y existe sólo interés por el manejo tecnológico puntual, perdiéndose la oportunidad de aprovechar las situaciones que amplíen el conocimiento.

Por otro lado, luego del análisis efectuado a los textos empleados y al DCN, y de la entrevista estructurada efectuada a algunos profesores, se vio reforzada la afirmación de que los docentes priorizan las actividades y tareas que favorecen los procesos de simbolización y las aplicaciones para resolver organizaciones matemáticas puntuales, en lugar de buscar algo más de complejidad entre sus componentes a través de organizaciones matemáticas locales o regionales. Esto confirma el carácter aislado de las técnicas y el dominio de algoritmos como un fin en sí mismas.

En relación a los problemas, a sus semejanzas y diferencias, debió trabajarse más en que los alumnos se den cuenta de los cambios presentes en cada uno de los tipos de problemas.

Conclusiones

Del tratamiento del álgebra en la escuela:

1. La actividad matemática desarrollada en el primer año de secundaria no corresponde a un proceso de algebrización, además la modelización está prácticamente ausente en el proceso de estudio del álgebra.
2. Tomando como referente la noción de praxeología matemática y didáctica Chevallard (1999), dentro del marco teórico de la TAD, afirmamos que en la educación secundaria del Perú, se estudian organizaciones o praxeologías matemáticas puntuales y rígidas, centradas en el bloque práctico- técnico, es decir, que en la mayoría de

los casos sólo conducen a la aplicación de algoritmos algebraicos, ignorando su procedencia y las interrelaciones que tienen con otras situaciones.

3. El álgebra es una herramienta de mucha utilidad, debido a su poder de modelización. Sin embargo, en nuestro contexto de estudio a nivel escolar no se llega a comprender y aprovechar las ventajas de su utilización. De lo observado, se concluye que las tareas o problemas que tradicionalmente se plantean en aula tienen un carácter fuertemente aislado y no refuerzan la importancia de la justificación de los procedimientos empleados. Nuestro sistema refuerza la idea de que los modelos planteados para un problema, son específicos para ese problema; no se plantea la generalidad de los mismos, o su aplicación a otro tipo de problemas.

Del análisis epistemológico:

4. Observamos que desde la llamada matemática sabia se consideran los polinomios como una estructura con propiedades y relaciones especiales. Por otro lado, a nivel escolar no se expone un tratamiento riguroso al tema de polinomios; afirmamos esto porque los temas se presentan por separado en forma aislada, sin que formen parte de una estructura (anillo de polinomios); esto evidencia los procesos transpositivos y de adaptación para su estudio a nivel escolar. En vista de ello, consideramos que debiera buscarse un punto intermedio, a fin de evitar generar conflictos en estudios posteriores a otro nivel. Frente a esto la TAD tampoco propone un tratamiento riguroso y estructural de los contenidos algebraicos, sino más bien plantea introducir el álgebra como un instrumento de modelización de situaciones planteadas en tipos de problemas.
5. Dentro del estudio de las estructuras algebraicas consideramos al anillo de polinomios, y especialmente a la factorización de polinomios como el tema central que

permite obtener las raíces de una ecuación. Quizás esto de pie para pensar en el futuro que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela.

De la propuesta de organización didáctica:

6. Teniendo en cuenta los elementos de las praxeologías que plantea la TAD consideramos que, los tipos de tareas propuestas en el aula se deben encaminar hacia situaciones de complejidad creciente, que permitan apreciar las interrelaciones entre las tareas y que hagan evidente las técnicas y tecnologías necesarias para resolver cada situación.
7. En la modelización de los problemas planteados, se debe primero distinguir lo que es propio de cada problema, y lo que es común a todos ellos; para luego verbalizar y escribir en forma simbólica las relaciones cuantitativas que se presentan.
8. Algunos problemas se deben cambiar, debido a que no cumplieron los objetivos previamente planteados, es decir, admitir sólo soluciones algebraicas.
9. Sobre las técnicas empleadas, se evidenció en algunos casos falta de dominio en la manipulación algebraica, en la utilización de propiedades aritméticas y algebraicas, asociadas al contexto de interpretación de los enunciados propuestos. Creemos que estos errores evidencian principalmente la falta de conocimiento de los elementos tecnológicos que explican y validan las técnicas.

Referencias

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(3), 247-304.

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19 (2), 221-266. Recuperado el 5 de abril de 2011, de: www.cienciamia.com.mx/.../El_analisis_de_las_practicas_docentes_en_la_...

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *En Recherches en didactique des mathematiques*, *13(3),* 295-332.

Godino, J.; Bencomo, D., Font, V. & Wilhemi, M. (2006). Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. *En Paradigma*, XXVII (2), 221-252

❖❖❖

Idoneidad didáctica de un proceso de instrucción sobre problemas de programación lineal, en estudiantes del quinto grado de educación secundaria (versión del libro de resúmenes)

Milton Santiago Matildo Olivos
I.E Peruano Japonés La Victoria- Perú
m.matildo@pucp.pe

Resumen

El tema de programación lineal es tratado en los textos de educación secundaria de manera mecánica. Se resuelven los problemas sigiendo una "receta" que impide el análisis y comprensión de los problemas.

La presente investigación tiene por objetivo principal Diseñar y analizar un proceso de instrucción que permita a los estudiantes del quinto grado de Educación Secundaria resolver comprensivamente problemas de programación lineal.

El marco teórico utilizado es el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e Instrucción matemática (EOS). Este marco teórico permitirá diseñar un proceso de estudio teniendo en cuenta el significado de referencia que determina el significado institucional pretendido y efectivamente implementado. Además se analiza la idoneidad didáctica del proceso de estudio efectivamente.

El proceso de instrucción fue diseñado teniendo en cuenta las idoneidades didácticas, y las dificultades encontradas en los textos de educación secundaria. Se diseñaron ocho actividades que buscaron analizar y profundizar la comprensión de problemas de programación lineal. Se utilizó el software de Geogebra para obtener una alta idoneidad didáctica y ampliar el campo de problemas de programación lineal.

Las actividades diseñadas permitieron una mejor comprensión de los problemas de programación lineal y el software de Geogebra permitió ampliar el campo de problemas de programación lineal, al resolver situaciones en donde las

coordenadas no sean enteras, dando solución al problema en forma gráfica.

Palabras clave: Idoneidad didáctica, diseño educativo, Programación lineal, Geogebra.

Referencias

Godino, J Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción matemática. *The International Joournal on Mathematics Education*, 127 - 135.

Godino, J. D., Contreras, A y Font, V. (2006). Análisis de procesos de Instrucción basado en el enfoque ontológico - semiótico de la cognición matemática. *Rechers en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39 - 88.

Godino, J. (2011) Indicadores de la Idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII CIAEM, - IACME*. Recife, Brasil.

Juan Diaz Godino, Belisa Bencomo, Vicenc Font y Miguel R. Wilhelmi. (2006). Análisis y valoración de la Idoneidad Didactica de Procesos de Estudio de la Matematicas. *Paradigma*, 27 (2), 221 - 252.

❖❖❖

Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años

Silvia Susana García Benavides
Colegio Gimnasio Moderno - Colombia
susanagarcia@gimnasiomoderno.edu.co

Resumen

La presente investigación partiendo de la consulta de 78 documentos entre libros, reportes de investigación, tesis de grado de doctorado y artículos de revistas referentes a la noción de problema, resolución de problemas, estrategias de resolución de problemas, patrones, generalización matemática, psicología, lenguaje algebraico y modelos de investigación cualitativa, determina el estado de investigaciones realizadas referentes a Resolución de problemas y a la generalización, encontrando que el estudio de patrones y de estrategias de solución como tal, empieza a considerarse parte integral del trabajo en la clase de matemáticas en currículos internacionales apenas en la última década.

Atendiendo a este resultado, mediante la metodología Estudio de Caso y haciendo uso de un formato de selección de estudiantes por parte de profesores, la subprueba matrices del test Wisc IV, un cuadernillo de trabajo que incluyó seis problemas de generalización lineal y entrevistas clínicas realizadas a cada participante, como instrumentos de recolección de la información, se describen las rutas por las cuales cinco estudiantes del grado sexto del Colegio Gimnasio Moderno con edades promedio de 13 años, acceden a la generalización como estrategia de resolución de problemas.

Palabras clave: Matemáticas, resolución de problemas, generalización.

Introducción

La presente investigación contribuye a los campos de la Didáctica de la Matemática: Resolución de Problemas y

Generalización, mediante la descripción de las rutas de acceso a la "generalización" como estrategia de resolución de problemas matemáticos utilizada por niños de 13 años que puede ser utilizada como vía de acceso al álgebra.

Se presentan como preliminares, los antecedentes referidos a estudios sobre la resolución de problemas en matemáticas y su correspondiente impacto curricular e investigaciones acerca de la resolución de problemas y de la generalización matemática, y la delimitación del problema en la que se incluye el objetivo general y los objetivos específicos. Seguidamente, el marco teórico en el cual se abordan los términos *problema* y *generalización,* incluidos la resolución de problemas, fases y estrategias de resolución y de generalización. Posteriormente se expone el marco metodológico, esto es, el enfoque estudio de caso y la descripción de los participantes en la investigación, los instrumentos utilizados en la recolección de la información, a saber, formato de selección de estudiantes por parte de sus profesores, test WISC IV, el cuadernillo de trabajo y las entrevistas individuales con el correspondiente análisis de la información recolectada que incluye la triangulación de los diferentes instrumentos y finalmente, se presentan las conclusiones generales de la investigación.

Delimitación del problema y objetivo

En la problemática y tendencias que en la actualidad se discuten en los campos de la Resolución de Problemas y la Generalización, tanto a nivel nacional como internacional se destacan principalmente las siguientes ideas:

- La generalización es una de las posibles vías de acceso al álgebra (Butto y Rojano, 2004).
- De los estudiantes que logran acceder a la generalización, apenas un 5% logra expresarlo de forma algebraica (Cañadas et al., 2008).

De acuerdo a estos referentes y teniendo en cuenta que:

1) "*La matemática es … la búsqueda de patrones y relaciones*" (MEN, 2006, p. 13).
2) Existe una estrecha relación entre la generalización y la actividad de reconocimiento de patrones, como se observa en el marco teórico y antecedentes de la investigación, y que
3) "*La generalización es el verdadero nervio de la matemática*" (Mason, Burton y Stacey, 1988, p. 21).

La investigación se propone como objetivo "*Caracterizar las rutas de acceso al proceso de generalización como estrategia de solución de problemas seguidas por estudiantes de trece años"*.

Marco Teórico

Después de realizar el análisis de diferentes definiciones del término problema se adopta siguiente definición para la presente investigación:

Un problema es toda situación o desafío que exige por parte del resolutor la búsqueda de una solución no rutinaria ni alcanzable de forma inmediata, mediante la elección y uso de una o varias estrategias de resolución.

Así mismo, como la idea que resume mejor lo que significa generalizar, se adopta la de Polya (1965) quien afirma que:

"Generalizar consiste en pasar (…) del examen de un conjunto limitado de objetos al de un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado". (p. 97).

Fases de la generalización consideradas: *Ver* (Visión de la regularidad), *Describir* (Exposición verbal), *Escribir* (Registrar un patrón) y *Verificar* (Probar la validez de las fórmulas).

Metodología

En la investigación realizada mediante la metodología cualitativa de Estudio de Caso con cinco estudiantes del grado sexto del Colegio Gimnasio Moderno, se hace uso en un primer momento del "*Formato de selección de estudiantes por parte de profesores*" y *la subprueba matrices de la escala Wechsler de*

Inteligencia para niños (WISC VI), en un segundo momento, de *un cuadernillo de trabajo*, y finalmente, en un tercer momento, de *las entrevistas clínicas* realizadas a los participantes como instrumentos de recolección de la información.

Ejemplo de investigación

Para el análisis del cuadernillo de trabajo se construyeron las categorías de análisis siguientes para cada fase:

<table>
<tr><td rowspan="2">ESTRATEGIAS DE NIVEL</td><td colspan="4">Fases en la contrucción de una generalización</td></tr>
<tr><td>VER</td><td>DECIR</td><td>ESCRIBIR</td><td>VERIFICAR</td></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td rowspan="4">(OI) Observar la imagen como un todo</td><td rowspan="4">(DIT) Describir características de la imagen como un todo</td><td>Escribir las propiedades comunes entre los casos</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>(EPCP) Escribir con palabras las características de la imagen</td></tr>
<tr><td>(EPCM) Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen</td></tr>
<tr><td>(EPCS) Escribir con símbolos las características de la imagen</td></tr>
<tr><td rowspan="4">II</td><td rowspan="4">(AI) Analizar la imagen (descompone el todo en sus partes)</td><td rowspan="4">(DCP) Describir las propiedades comunes entre los casos particulares</td><td>Escribir características de las partes en el todo</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>(ECPP) Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares</td></tr>
<tr><td>(ECPM) Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares</td></tr>
<tr><td>(ECPS) Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares</td></tr>
</table>

III	Establecer relaciones entre las partes de la imagen	(DRP) Describir la forma en que se relacionan las partes	Escribir la forma en que se relacionan las partes	
	(ERN) Establecer relaciones necesarias		(EFRP) Escribir con palabras	
	(ERS) Establecer relaciones suficientes		(EFRM) Escribir con palabras y simbolos	
			(EFRS) Escribir con simbolos	
IV	(CRP) Conjeturar acerca de las relaciones entre partes de la imagen	(DCR) Describir la conjetura observada de las relaciones entre las partes	Escribir la conjetura observada de las relaciones entre las partes	(VCTC) Verifica su conjetura construyendo un término cercano
			(ECOP) Escribir con palabras	(VCC) Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora
			(ECOM) Escribir con palabras y simbolos	(VCM) Verifica su conjetura manualmente
			(ECOS) Escribir con simbolos3	(NVC) No verifica su conjetura

Tabla Nro. 1: Fases en la construcción de una generalización, niveles identificados por fase y categorías de Análisis.

Definidas las categorías de análisis, se presentan en el gráfico 1, las rutas de acceso a la generalización seguidas por el estudiante Juan, es decir, las rutas formadas por las categorías utilizadas por el estudiante en cada fase de la estrategia de resolución de problemas de generalización, en cada uno de los seis problemas contenidos en el cuadernillo de trabajo.

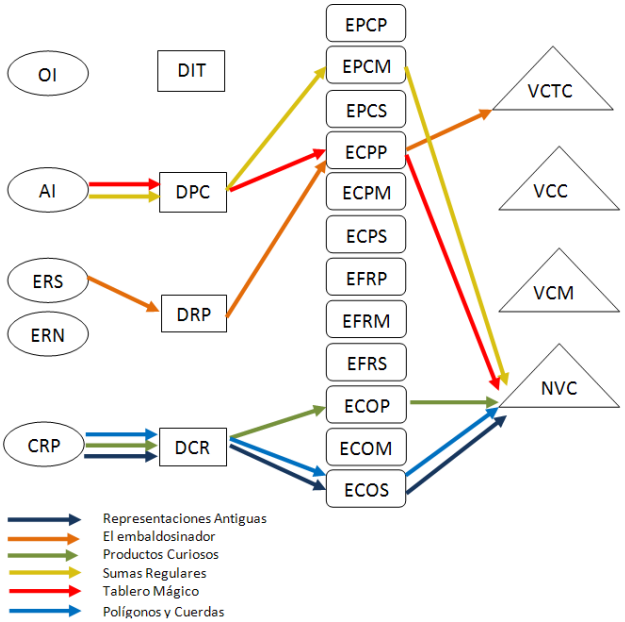


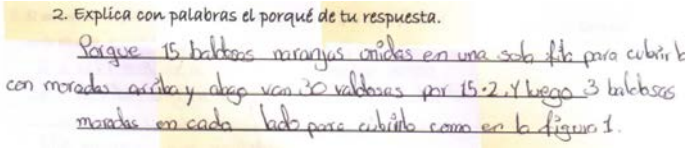
Gráfico 1: Rutas de acceso a la generalización seguidas por Juan en los seis problemas propuestos en el cuadernillo de trabajo.

Como se puede observar en el gráfico 1, Juan:

- ✓ Sólo llega a la fase de verificación (VCTC), cuando parte de la categoría ERS correspondiente a la fase VER.
- ✓ En tres de los seis problemas logra partir de la categoría CRP identificada como la de mayor dificultad en la fase VER, pero contrario a la hipótesis no es en alguno de estos casos en los que llega a la fase VERIFICACIÓN.
- ✓ No evidencia alcance en la fase de VERIFICACIÓN, omitiendo la misma en cinco de los seis problemas abordados.
- ✓ Sólo logra llegar a la escritura simbólica en dos problemas, esto es, en el problema Representaciones Antiguas y el problema Polígonos y Cuerdas.

A continuación se presenta el análisis paso a paso del problema El Embaldosinador, considerado por ser el único problema en el que llega a la fase de VERIFICACIÓN.

Para la fase VER, se encuentra que Juan establece relaciones suficientes (ERS), ya que relaciona el largo y ancho de la figura con la cantidad de baldosas que necesita para el caso particular, describiendo la forma en que se relacionan (DRP) para la fase DECIR, así (ver gráfico 2):


2. Explica con palabras el porqué de tu respuesta.

Porque 15 baldosas naranjas unidas en una sola fila para cubrir la con moradas arriba y abajo van 30 baldosas por 15·2. Y luego 3 baldosas moradas en cada lado para cubrirlo como en la figura 1.

Gráfico 2: Explicación fases de Generalización seguidas por Juan.

De la explicación anterior provista por el estudiante, en la fase ESCRIBIR, se observa que escribe con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares (ECPP) que fueran vistas y descritas. Y finalmente, en la fase de VERIFICACIÓN, realiza su comprobación mediante el gráfico correspondiente al término en cuestión (ver gráfico 3):

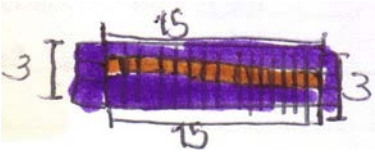


Gráfico 3: Fase de Generalización VERIFICACIÓN realizada por Juan.

De esta manera la ruta de acceso a la generalización que sigue Juan para resolver el problema en mención es ERS, DRP, ECPP y VCTC (Ver gráfico 10).

De acuerdo a la triangulación de los resultados obtenidos por Juan en los formatos de selección de estudiantes por parte de sus profesores, las subpruebas matrices del test Wisc IV y los cuadernillos de trabajo se encuentra coherencia entre los

resultados proporcionados por el formato de selección de estudiantes por parte de sus profesores y por el cuadernillo de trabajo quienes perciben al estudiante como un estudiante de alta capacidad matemática y alto desempeño en la resolución de problemas, en contraste, los resultados de la subprueba matrices del test Wisc IV, pese al buen desempeño en el trabajo en los problemas, que indica una buena capacidad para percibir variantes e invariantes, uno de los objetivos principales de la subprueba, arroja resultados incluso inferiores a la media. Aspecto que, sumado a las incoherencia en tres de los cinco casos analizados, hace pensar, que la subprueba matrices del test Wisc IV, no es el instrumento ideal para establecer una relación entre ésta, una alta capacidad matemática y un alto desempeño en la resolución de problemas en los que se utiliza para su solución el proceso de generalización.

Conclusiones:

Al considerar los objetivos y resultados obtenidos en el presente estudio, se presentan tres de las principales conclusiones obtenidas fueron:

1) De las catorce rutas diferentes consideradas, las más utilizadas incluyeron la elaboración de una conjetura acerca de las relaciones entre las partes, la descripción de las relaciones observadas, la escritura con palabras y símbolos de la conjetura observada y la no verificación de la conjetura o verificación mediante un término cercano, validándose, lo señalado por Hernández (2002) "la verificación es omitida en la mayor parte de las resoluciones de problemas que proponen la construcción de una generalización".

2) El número de rutas que conducen a la generalización sin incluir el uso del lenguaje algebraico (6/14), respecto al número de rutas que lo incluyen (1/14), confirman los resultados de la investigación de Trujillo, Castro y Molina (2008), quienes expresan que existe mayor facilidad en la

descripción de un patrón en su forma verbal, respecto a su forma algebraica.

3) Como lo señala Hernández (2002), la verificación, cuarta y última fase en la construcción de una generalización de acuerdo a las Mason et al (1999); es omitida en la mayor parte de las resoluciones de problemas, aun cuando se hacen explícitas preguntas que proponen el trabajo con un término no cercano de la sucesión.

Recomendaciones:

Con base en los resultados obtenidos en el estudio y las conclusiones planteadas se recomienda considerar en nuevas investigaciones la perspectiva semiótico cultural de la educación matemática y trabajar en el diseño de material específico en cada categoría que permita el acceso a la generalización siguiendo la ruta CRP → DCR → ECOS → VCTC.

Referencias

Butto, C., Rojano T. (2004), *Introduccion temprana al pensamiento algebraico:Un abordaje basado en la geometría*, México, Santillana.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). *Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas*. PNA, 2(3), 137-151.

Grupo Azarquiel. (1991). *Ideas y actividades para enseñar Algebra*. Madrid: Síntesi

Hernández, O. (2002). *Procesos cognoscitivos y metacognoscitivos en estudiantes universitarios puertorriqueños en la solución de problemas matemáticos no típicos*. Disertación doctoral.

Mason, J., Graham, A., Pimm. D. & Gowar, N. (1999). *Rutas hacia el / Raíces del: Álgebra*. Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (XIX Reimp. 1995). México: Trillas.

Radford, L. (2010). *Layers of generality and types of generalization in pattern activities.* PNA, 4(2), 37-62.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. USA.

❖❖❖

Concepções de professores da educação básica sobre variabilidade estatística (tenemos la version extensa pero en pdf)

Diva Valério Novaes
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia e Pontifícia Universidade Católica São Paulo – Brasil
divavn@ig.com.br

Cileda Q. S. Coutinho
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia e Pontifícia Universidade Católica São Paulo - Brasil.
cileda@pucsp.com.br

Resumo

Este artigo apresenta parte dos resultados observados em pesquisa de doutorado financiada pela CAPES, cujo objetivo foi diagnosticar concepções didáticas e específicas associadas à percepção e consideração da variabilidade na análise estatística de dados em contexto escolar. A pertinência e relevância do tema é reforçada pela sua inclusão nos currículos de diversos países, particularmente no Brasil ao final da decada de 90, sendo que pesquisas recentes indicam a pouca familiaridade dos professores com estes conteúdos. Fizemos um estudo de caso: dois professores de Matemática lecionando de 6º a 9º ano de escolaridade no Brasil. Os dados foram coletados em observações realizadas ao longo de três anos, dos quais dois semestres não consecutivos foram dedicados ao trabalho em sala de aula desses professores. Nessa fase, após cada aula, discutiam-se os fenômenos didáticos observados com o grupo de participantes do projeto no qual a pesquisa se inseria, em características de grupo colaborativo. A análise desses dados foi feita à luz da Teoria das Concepções: uma concepção é a estrutura mental atribuída a um sujeito por um observador do seu comportamento e a aprendizagem é caracterizada pela mudança de uma concepção à outra. Nessa teoria, considera-se quatro componentes indissociáveis: um conjunto de problemas no qual a concepção tem significado; um conjunto de invariantes operatórios mobilizados na

evolução da estratégia de resolução do problema; um sistema de representações utilizado pelo sujeito e uma estrutura de controle, constituída por invariantes operatórios que organizam as funções de validação local ou total da estratégia desenvolvida. Nessa pesquisa, o campo de problemas delimitado foi a análise de um conjunto de dados por meio da filosofia da Análise Exploratória de Dados. O quadro teórico completou-se pelo estudo de resultados de pesquisas nacionais e internacionais que buscaram não apenas compreender a constituição do pensamento estatístico como também as necessidades curriculares. Pudemos identificar concepções sobre os objetos estatísticos trabalhados e sobre os objetos relacionados aos saberes e práticas docentes mobilizados na elaboração e gestão de atividades, as quais designamos por "concepções didáticas". Destacamos a influência das concepções didáticas sobre as específicas, que se materializa no fato de que algumas concepções de conteúdo, mobilizadas fora do domínio de validade pelos professores, não foram identificadas na observação dos seus alunos, permitindo inferir que as ações desencadeadas no grupo colaborativo no qual o trabalho foi desenvolvido foram eficazes na regulação da ação didática desses docentes.

Palavras chave: concepções, educação estatística, formação de professores.

Referências

Franklin, C.; Kader, G.; Mewborn, D.; Moreno, J.; Peck, R.; Perry, M.; Scheaffer, R. *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE)* report: A pre-K–12 curriculum framework. Endorsed by the American Statistical Association in 2005. Alexandria (VA, USA), 2007.

Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, Grenoble, n.58,p.2.

Novaes D. V. (2011). *Concepções de Professores da Educação Básica sobre Variabilidade Estatística*. Tese Doutorado em Educação Matemática, PUC-SP.

Pfannkuch, M. (2008) Training Teachers To Develop Statistical Thinking. In: *The ICMI Study 18 and 2008 Iase Round Table Conference. Proceedings*... México: ICMI/IASE.

❖❖❖

Prototipos etnomatemáticos andinos y el aprendizaje de la matemática en la educación intercultural bilingüe – Puno (Solo se tiene una versión de dos páginas que debe ser la del libro de resúmenes)

Edgar Atamari Zapana
Universidad Andina "Néstor Cáceres Velásquez" - Perú
atamariedgar@yahoo.es

Resumen

El presente trabajo de investigación denominado "Prototipos etnomatemáticos andinos y el aprendizaje de la matemática en la Educación Intercultural Bilingüe – Puno", ha tenido como objetivo principal el de determinar la efectividad de la aplicación de los prototipos etnomatemáticos andinos en el aprendizaje de la aritmética y la geometría. Para el referido estudio se ha utilizado la metodología de investigación de diseño cuasi experimental, que funcionó con dos grupos: uno de control y dos experimentales, a partir de los cuales se llegó a probar la hipótesis. Esta consistió en evidenciar, la efectividad de los prototipos etnomatemáticos andinos, en los logros del aprendizaje de la aritmética y la geometría. Apreciamos esto en el contraste de resultados de los promedios de notas de las pruebas de salida de los alumnos de los dos grupos experimentales con el promedio de notas de la prueba de salida de los alumnos del grupo de control, conforme a la prueba de hipótesis estadística de la distribución t de Student para la diferencia de dos promedios; respecto a "la yupana", su valor calculado es de tc= 4.49 con la lengua quechua, y con el idioma español es de tc = 3.96; respecto al "zorro y la oveja", con el idioma español, su valor calculado es de tc = 2.07, siendo en ambos casos significativos a un nivel del 5% ($\alpha = 0.05$) de probabilidad. Además, de acuerdo a los resultados de la opinión de los estudiantes referente a la reafirmación de la identidad cultural, para el caso de "la yupana" y "el zorro y la oveja", la totalidad de los alumnos de

ambos grupos han manifestado estar "totalmente de acuerdo". De esta forma los niños y niñas de las instituciones educativas, sujetos al experimento, han revalorado estos prototipos etnomatemáticos andinos, expresando en la práctica identificarse con lo suyo.

Palabras clave: Etnomatemática, Didáctica Intercultural, Yupana.

Referencias

Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática*. Barcelona, España: Editorial Paidos.

D´Ambrosio, U. (2002) *Etnomatemática* Elo entre as tradiçoes e a modernidade. Belo Horizonte, Brasil: Autentica Editora.

Lizarzaburu, A & zapata, G. (2001). *Pluriculturalidad y Aprendizaje de la Matemática en América Latina*. Madrid: Ediciones Morata.

Schroeder, J. (1997). *Metodología para la Enseñanza de la Matemática en un País Pluricultural*. MED – GTZ. Lima.

❖❖❖

Resolución de problemas: un estudio sobre las ecuaciones lineales desde la teoría de registros de Duval

Luz Milagros Azañero Távara
Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) - Perú
mazanero18@gmail.com

Resumen

El trabajo de investigación se basa en una situación que se presenta siempre en el área de la matemática, los alumnos generalmente muestran dificultades para lograr la comprensión de los problemas con ecuaciones lineales y realizar la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. La presente experiencia se llevó a cabo con las alumnas de Primer Grado de Educación Secundaria del Colegio Parroquial Reina de la Paz de San Isidro. Se utilizaron como instrumentos una secuencia de problemas con dificultad graduada relacionados con ecuaciones lineales y una ficha de análisis que son un conjunto de preguntas que permiten identificar el uso de registros de representación semiótica de las alumnas.

Palabras clave: Resolución de problemas, Ecuaciones lineales, Registros de representación semiótica.

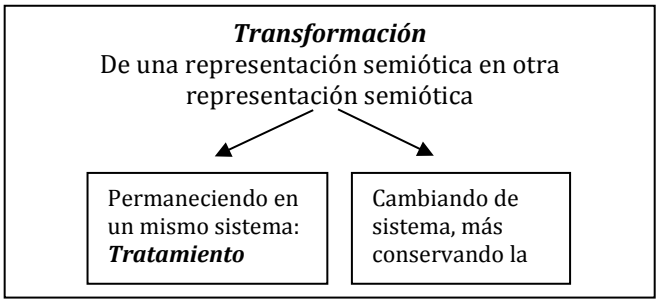
Introducción

La presente investigación pretende analizar las dificultades que tienen los alumnos de 1ro de secundaria cuando resuelven problemas matemáticos sobre ecuaciones lineales. Además evidenciar la importancia del uso de diferentes registros de representación semiótica para el aprendizaje de los problemas matemáticos sobre ecuaciones lineales.

Marco Teórico

El marco teórico que sustenta este trabajo es la teoría de Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval;

quien establece que el empleo de diferentes registros de representaciones semióticas en la adquisición de un objeto matemático hace posible la comprensión del mismo, de modo que los estudiantes al conocer los registros de representaciones semióticas aprenden el objeto matemático. Las representaciones semióticas es decir aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas, pues estarían subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación. Esta teoría tiene sus principios en el enfoque cognitivo, de Jean Piaget y el enfoque social de Lev. S. Vygotsky. De acuerdo con Duval los objetos matemáticos no son accesibles a la percepción; por esta razón es necesario representarlos para desarrollar el pensamiento matemático, es decir los objetos matemáticos son abstractos, la única manera de entenderlos es a través de representaciones semióticas (signos) como gráficos, letras, números, etc. Por ejemplo los objetos matemáticos pueden ser los números, las funciones o las rectas y sus representaciones**,** son las escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de las figuras. Duval enfatiza que existen dos tipos de transformaciones semióticas que son radicalmente diferentes. Como lo vemos en el siguiente cuadro:


Transformación
De una representación semiótica en otra representación semiótica
Permaneciendo en un mismo sistema: Tratamiento
Cambiando de sistema, más conservando la

Los tratamientos son transformaciones de representación dentro de un mismo registro: por ejemplo, efectuar un cálculo estrictamente en un mismo sistema de escritura o de representación de números; resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones; completar una figura según los criterios de conexidad y de simetría. Las conversiones son transformaciones de representaciones que consisten en cambiar de registros conservando los mismos objetos, por ejemplo: pasar de escritura algebraica de una ecuación a su representación gráfica. La conversión puede ser Congruente (concordancia lógica) o no congruente (sin concordancia lógica). Cuando el fenómeno es congruente se da el pasaje de una representación a otra de manera espontánea. Por tanto se observa: a) Correspondencia semántica: Entre las unidades significativas que las constituyen; b) Orden: Aprehensión de las unidades significativas; c) Univocidad semántica terminal: A cada unidad en el registro de partida le corresponde una en el de llegada. Y cuando el fenómeno no es congruente se observa que hay problemas al realizar el tratamiento y la conversión de representaciones.La comprensión de un objeto matemático reposa en la conversión de al menos dos registros de representación semiótica. Los registros pueden ser: Algebraico, Numérico, Gráfico, Verbal, Simbólico y Figural

Para la Resolución de Problemas, Mayer (1986) propone lo siguiente

Procesos y conocimientos necesarios para la solución de problemas	
Pasos	Conocimientos
Paso1. Representación del problema • Traducción • Integración	Lingüístico Esquemático
Paso 2. Solución del problema • Planificación • Ejecución	Estratégico Algorítmico

En referencia a la resolución de problemas Luceño (1999) detalla la propuesta de Mayer

Paso 1. La representación del problema: Supone la conversión de un problema verbal en una representación mental interna. Comprende dos pasos:

a) Traducción: implica la capacidad de traducir cada proposición del problema a una representación mental interna, expresada en fórmula matemática.
b) Integración de los datos: supone un conocimiento específico de los diversos tipos de problemas, a partir de un esquema adecuado a dicho problema.

Paso 2. Solución del problema: se trata de diseñar un plan de solución. Implica los dos pasos siguientes:

a) Planificación: búsqueda de estrategias para la resolución del problema.
b) Ejecución: supone realizar las operaciones/acciones diseñadas. Se trata, de ordinario, de las operaciones de cálculo.

Distingue 4 tipos de conocimientos:

1. Conocimiento lingüístico: este conocimiento implica la comprensión de los enunciados verbales.
2. Conocimiento esquemático: constituye la representación mental de la estructura semántica que subyace al problema.
3. Conocimiento estratégico: se refiere a la elaboración y seguimiento de los planes de solución.
4. Conocimiento algorítmico: hace alusión al procedimiento exacto necesario para resolver el problema.

Metodología

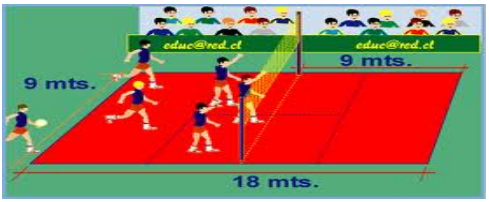
La metodología que se usó en este trabajo de investigación es la Ingeniería Didáctica. Para ello se revisó los antecedentes bibliográficos como libros, revistas, tesis sobre Resolución de Problemas con Ecuaciones Lineales, además de examinar cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes para traducir un problema presentado en lenguaje natural a un

lenguaje formal. Además se planteó situaciones y actividades relacionadas con Resolución de Problemas con Ecuaciones Lineales, es decir como los estudiantes de primero de secundaria podrían solucionar los problemas propuestos, que procesos realizarán en el desarrollo de estos. Luego se puso en marcha el dispositivo construido, se recolectaron los datos, se pidió la colaboración de observadores para que ayuden al profesor a cargo de la materia.

Problemas de la Propuesta Pedagógica

1. Las dimensiones oficiales de las canchas de vóley son 18m de largo y 9m de ancho.

   Todas las canchas de vóley deben cumplir la condición de ser rectangulares, con la longitud del largo el doble de la longitud del ancho.

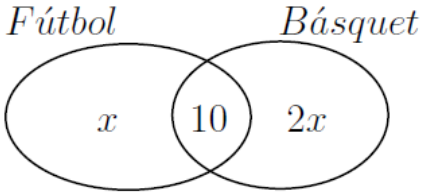


   a) Si la arquitecta Camila diseña una cancha de vóley cuyo largo mida 14 m ¿Cuánto debe medir el ancho según la condición dada? Dibuja un rectángulo y pon las dimensiones correspondientes.
   b) Calcula el perímetro de la cancha de vóley que diseña la arquitecta Camila.
   c) Dibuja un rectángulo que represente una cancha de vóley que cumple con la condición exigida y usa la variable "x" para indicar sus dimensiones.
   d) Usa lo hecho en la parte (c) y escribe una ecuación que exprese que el perímetro de la cancha de vóley es 48 metros.

e) Resuelve la ecuación planteada en (d) y dibuja el rectángulo que representa la cancha de vóley, con las dimensiones halladas.

2. Halla la edad de Eva si se sabe que el cuádruple de su edad hace 8 años, es el doble de la edad que tendrá dentro de 10 años.
   a) *Haz un cuadro que te ayude a utilizar los datos del problema.*
   b) *Resuelve el problema usando una ecuación*

3. Juan preguntó a 40 alumnos si practican básquet o fútbol. Al terminar de preguntar, Juan se inventó un problema e hizo el siguiente gráfico.



Observando el gráfico,

   a) Escribe el problema que tú piensas que inventó Juan.
   b) Plantea una ecuación para resolver el problema que inventaste.
   c) Resuelve el problema usando la ecuación.

Principales resultados

- Las alumnas de 1ro de secundaria muestran dificultades en la conversión del registro grafico al registro verbal y viceversa.
- Es posible estimular en los niños el uso de tratamientos y conversiones en y entre los diversos registros de representación semiótica relacionados con la resolución de problemas correspondientes a ecuaciones lineales.

Conclusiones

- Estimular a los estudiantes a que hagan tratamientos y conversiones en los registros de representación correspondientes a problemas que se resuelven empleando ecuaciones lineales, contribuye a una mejor comprensión de los problemas y a resolverlos adecuadamente.

Referencias

Arias, M. (2007). La resolución de problemas: enfoque y métodos para mejorar la educación matemática escolar. Revista de Aprender Matemáticas. 5-9. Lima, Perú.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1998). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá, Colombia.

Dias, S. (2010). Aprendizagem em Matemática. Papirus Editora. Sao Paulo, Brasil.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Grupo de Educación Matemática.

D'Amore, B. (2006). Didáctica de la Matemática. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá, Colombia.

Font. V. (2003) *Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática. Recuperado el 28 de octubre de 2011.* http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/vfont.pdf

Luceño, J. (1999). *Resolución de problemas aritméticos en el aula.* Ediciones Aljibe. Málaga. España

Perú, Ministerio de Educación (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular.* Lima, Perú.

Pólya, G. (1992). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México D.F. México.

❖❖❖

Identificacion de las prácticas matemáticas de los profesores en ejercicio en relación a los conceptos de fracciones

Milagros Carrillo Yalán
Pontificia Universidad Católica del Perú
Milagros.carrillo@pucp.edu.pe

Resumen

Un contenido matemático de reconocida dificultad para su enseñanza es el de las fracciones. Muchos profesores en ejercicio del nivel primario construyen organizaciones matemáticas enfatizando en el concepto parte-todo y utilizando como única técnica el doble conteo de las partes, pero soslayan otros conceptos (medida, cociente, razón y operador) los cuales son indispensables para la resolución de otras situaciones en las que el objeto representado se escapa del patrón parte-todo, obstaculizando así la comprensión de las fracciones.

Palabras clave: Conceptos de Fracción, TAD, Praxología

Introducción

El interés en la enseñanza de las fracciones nace a partir de la observación de errores conceptuales practicados por profesores en ejercicio, algunos de los cuales son tratados en Silva (2005). Aquello inspiró la necesidad de analizar los conceptos de fracción que utilizan los profesores en ejercicio del nivel primario, así como los conceptos que se encuentran en los textos escolares empleados por los mismos. Ello nos permitió encontrar que existe una gran dificultad en la comprensión de tales conceptos, tanto en los alumnos como en los propios docentes, quienes, para su enseñanza, se basan en el libro de texto distribuido por el Ministerio de Educación del Perú, el cual, en la parte correspondiente al tema de fracciones, enfatiza en el concepto parte – todo utilizando como única técnica la del doble conteo de las partes, dejando

de lado, a pesar de su importancia, a los demás conceptos de fracciones.

Marco Teórico y Metodológico

El marco teórico que sustenta este trabajo es la teoría antropológica de Yves Chevallard, quien sostiene que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una actividad humana y no sólo como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo. De acuerdo a este enfoque, lo más importante son las prácticas y éstas se basan fundamentalmente en tareas (problemas) apropiadas. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) sitúa la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. Además la TAD admite que toda actividad humana regularmente realizada, puede describirse como un modelo único, que se resume en la la palabra praxeología.

El término praxeología deriva de los términos praxis y logos. El término praxis hace referencia al saber hacer, es decir, los tipos de problemas o tareas que se estudian y las técnicas que se construyen para solucionarlos; el término logos, se identifica con el saber e incluye las descripciones y explicaciones que nos permiten entender las técnicas, es decir, el discurso tecnológico y la teoría que da sentido a los problemas planteados. Silva, M. (2005) en su Tesis doctoral "Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série" São Paulo - Brasil, presenta las tareas, tipos de tareas y técnicas usadas con mayor frecuencia en el tema de fracciones, las cuales han sido consideradas para el análisis del texto escolar Matemática quinto grado de Educación Primaria distribuido a nivel nacional por el Ministerio de Educación. La metodología es descriptiva y cualitativa.

Conceptos de fracciones	Tipos de Tareas	Técnicas
Concepto de Parte Todo	**Identificar** la fracción que corresponde a la figura presentada.	Técnica del doble conteo de partes.
		Superponer la figura y esconder los trazos de división.
		Identificar la equivalencia de las partes divididas y no divididas de la figura.
		A esta técnica también se le puede asociar la adición de fracciones.
		Comparar las medidas de cada segmento grandes que compone el lado mayor del rectángulo y constatar que los dos segmentos mayores miden cada uno, el doble del segmento menor.
		Consiste en la reconstrucción de figuras presentadas con base de la parte pintada.
		Escoger una unidad de medida de área y de esta manera determinar la fracción aproximada.
	Reconstruir un entero	Reversibilidad del doble conteo de las partes

Figura 1: Elementos de la praxeología para el tema de fracciones según Silva (2005)

Concepto de medida	**Determinar** medidas de longitud de un objeto.	❖ Técnica del doble conteo de las partes. ❖ Técnica de la reconstrucción
Concepto de cociente	**Distribuir** en partes iguales un objeto a "n" personas	La operación de división
Concepto de razón	**Determinar** la razón de ampliación o reducción entre dos figuras;	La técnica encargada de resolver este tipo de tareas, percibirá como base la figura presentada, caracterizando una ampliación y por otro lado si se toma de base la segunda figura se hablará de una reducción.
Concepto de operador	**Construir** un cuadrado cuyo lado es la a/b de la medida del lado de otro cuadrado dado. **Obtener** a/b de n unidades	La operación de la multiplicación y división.

Figura 2: Elementos de la praxologia para el tema de fracciones según Silva (2005)

Principales resultados y conclusiones

- En la enseñanza del tema de fracciones, no se consideran los diversos conceptos que este presenta. Ello se observa en el libro de matemática quinto grado de educación primaria distribuido a nivel nacional por el Ministerio de Educación, en el que se define fracción tomando en cuenta solamente el concepto de parte – todo.

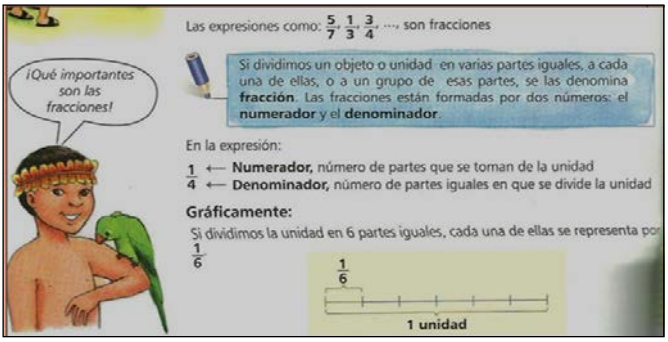

Las expresiones como: 5/7, 1/3, 3/4, ... son fracciones
¡Qué importantes son las fracciones!
Si dividimos un objeto o unidad en varias partes iguales, a cada una de ellas, o a un grupo de esas partes, se las denomina fracción. Las fracciones están formadas por dos números: el numerador y el denominador.
En la expresión:
1/4 ← Numerador, número de partes que se toman de la unidad
1/4 ← Denominador, número de partes iguales en que se divide la unidad
Gráficamente:
Si dividimos la unidad en 6 partes iguales, cada una de ellas se representa por
1/6
1/6
1 unidad

Figura 3: Libro de texto de 5° de primaria (p.84)

- Las situaciones propuestas en el mencionado libro, han sido planteadas para ser resueltas considerando únicamente el concepto de parte – todo, omitiendo los otros conceptos: cociente, operador, razón y medida.
- La definición de fracción establecida en el texto se restringe al caso de fracción propia, dejando de lado la posibilidad de analizar el concepto de fracción relacionado a la fracción impropia.
- La representación grafica de las fracciones impropias (ver figura 4) es inadecuada y difícilmente podría ser comprendida a menos que esté en función del concepto de fracción como cociente (división o distribución).

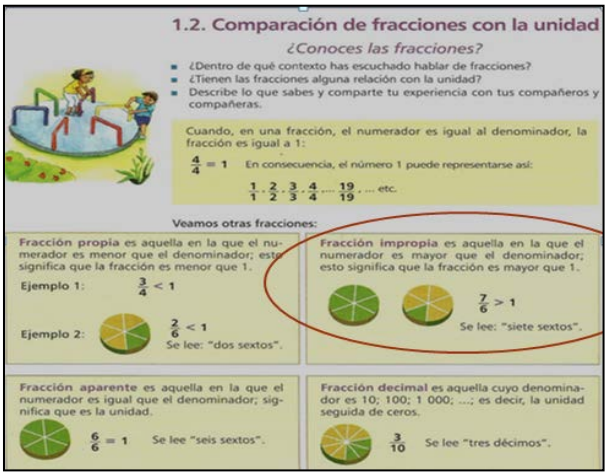
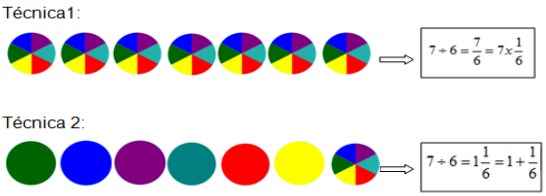


Figura 4: Libro de texto de 5° de primaria (p.86)

Por ejemplo, distribuir 7 pizzas entre 6 personas. Para ello se debe ver a la fracción 7/6 como una división indicada, la cual alude a una acción de distribuir. Técnicas: La primera, dividir cada pizza, o sea, cada unidad en 6 partes iguales, destinando a cada persona una de esas seis partes, es decir, 1/6 de una unidad; luego, si juntamos los 1/6 de cada una de las 7 pizzas concluiríamos que cada persona recibe en total 7/6. Una segunda técnica seria distribuir una unidad entera para cada persona y dividir la última unidad en seis partes iguales, concluyendo que a cada persona le corresponde 1+ 1/6 (lo que es igual a 7/6).



Referencias

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique Du didactique. Recherches en didactique des Mathématiques.

Elguero, C. (2008). Construcción social de ideas en torno AL número racional en un escenario sociocultural Del trabajo. Tesis de Maestria. México.

Flores, R. (2010). Significados asociados a la noción de fracción en la educación secundaria. Tesis. México.

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Superior. Lima, Perú.

PERÚ, MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2009). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Lima, Perú.

Piscoya, L. (2002) ¿Cuánto saben nuestros maestros?, Universidad Nacional Mayor de san Marcos, Lima, Perú.

Quiroz, E. y Sagredo, M. (2009). Matemática Quinto Grado de Educación Primaria. Editorial Bruño Lima, Peru.

Ríos, Y. (2006). Una Ingeniería didáctica sobre fracciones. Universidad de Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Silva, M. (1997). Sobre introdução do conceito de número fracionário. Tesis Maestria. São Paulo. Brasil.

Silva, M. (2005). Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série. Tesis doctoral. São Paulo. Brasil.

❖❖❖

Concepções e conhecimentos geométricos de um grupo de alunos do primeiro ano de um curso de Matemática (versión del libro de resúmenes)

Karla Aparecida Lovis
Universidade Estadual de Maringá - Brasil
karlalovis@hotmail.com

Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá - Brasil
vsfranco@uem.br

Resumo

O presente estudo investigou as concepções e conhecimentos de geometria de um grupo de onze estudantes ingressantes no curso de Matemática de uma Universidade Pública, localizada no norte do estado do Paraná-Brasil. A escolha desse grupo se deu porque queríamos averiguar quais as concepções e conhecimentos que os alunos traziam da escola básica e do seu contexto social.

O estudo das concepções e conhecimentos de alunos e professores constitui uma forma de perceber como esses sujeitos organizam, interpretam e pensam sobre determinado assunto. Ponte (1992, p. 1) destaca que "as concepções tem um natureza essencialmente cognitiva", e que são indispensáveis, uma vez que estruturam o sentido que damos as coisas, e ao mesmo tempo são bloqueadoras, pois impedem novas situações ou certos problemas, "limitando nossas possibilidades de actuação e compreensão" (Ponte, 1992, p.1). As concepções são formadas num processo individual e social. Assim, as nossas concepções sobre geometria são influencidadas pelas experiências que vivenciamos e também pelos processos de socialização (Thompson, 1997).

Para atingirmos nosso objetivo propusemos um questionário com três perguntas abertas: a primeira era relacionada ao conteúdo de geometria euclidiana e as demais eram situações práticas na qual o aluno poderia responder usando seus conhecimentos geométricos ou as suas concepções sobre o que

estava sendo indagado. Vale destacar que o questionário foi entregue para aproximadamente quarenta e cinco alunos e destes trinta e quatro não entregaram as respostas, apesar das inúmeras solicitações. O principal motivo alegado é que eles não compreendiam o que estava sendo perguntado. Na sequência, relatamos brevemente alguns resultados obtidos.

Na primeira questão perguntamos como eles encontrariam a distância de um ponto dado a uma reta. Esta pergunta tem uma resposta geométrica e para obtê-la basta tomar a perpendicular à reta que passa pelo ponto, e a resposta será o comprimento do segmento que tem como extremos o ponto dado e a interseção da reta com a perpendicular. Para essa questão, obtivemos oito alunos entre os onze, que responderam que para encontrar a distância usariam a fórmula descrita pela geometria analítica. Os demais alunos responderam que usariam projeção, mas não explicaram como a fariam. A resposta dos alunos evidencia a necessidade de uma resolução algébrica dos problemas geométricos. A necessidade de apresentar respostas algébricas também foi observada por Lovis (2009) em uma pesquisa com professores de matemática.

Na segunda questão indagamos como eles explicariam o fato de que quando estamos em uma estrada reta temos a impressão que as laterais da estrada se encontram em um ponto mais distante aos nossos olhos. O objetivo dessa pergunta foi perceber quais o conhecimentos e concepções que os alunos tinham diante de um problema prático e se eles saberiam responder usando seus conhecimentos geométricos. Nenhuma das respostas dos alunos afirmava que as retas paralelas iriam se encontrar no infinito. Lembramos, que o que ocorre nesse caso é que estamos trabalhando com a Geometria Projetiva, e que nessa geometria não existem retas paralelas. Poderíamos então ficar satisfeitos, se não tivéssemos obtidos justificativas insuficientes, tais como: “Não se encontram, pois se essas duas retas são paralelas quer dizer que elas tem todos os pontos diferentes. Se elas se encontrasse no infinito seriam perpendiculares”; e ainda “não, se elas são paralelas elas não

formam ângulo, ou seja, elas não se encontram, só de forem a mesma reta". Baseando-se nas respostas dos alunos, percebemos evidentes lacunas nos seus conhecimentos geométrico inclusive no conceito de retas paralelas.

Na última questão pedimos para os estudantes explicar porque ao observarmos o desaparecimento de um navio no mar, o casco parece sumir primeiro, depois o mastro e as velas. Nesta pergunta queríamos averiguar o conhecimento que os alunos possuíam da superfície de uma esfera, e se eles conseguiriam pensar sobre ela, em um problema prático. Apenas cinco alunos arriscaram uma resposta. Dentre elas destacamos: "espaço é um círculo" e "certamente que o navio estava mais distante do que os outros, ou então, o navio em questão era menor". Novamente, os alunos tiveram dificuldades em argumentar em suas respostas. Nacarato (2000) aponta que, apesar das iniciativas, em resgatar o ensino de geometria, que se fez presente nas propostas curriculares oficiais, elas ainda não atingiram a maioria das escolas brasileiras, principalmente as públicas e as séries iniciais do ensino fundamental. Acreditamos que o estudo das concepções podem ajudam a identificar os conhecimentos, as lacunas e como os estudantes compreendem os conteúdos. Evidentemente, pelo pequeno número observado, e localmente restrito, não podemos generalizar as conclusões obtidas. Mas, pelas experiências que temos tido em curso de capacitação de professores de matemática, acreditamos que essas conclusões podem ser generalizadas para um público bem mais amplo, mas isso seria motivo para mais investigações. Esperamos que os alunos ao concluírem o curso pesquisado possam ter mudado suas concepções, e que o conhecimento geométrico seja ampliado e melhor direcionado.

Palavras-chave: Educação Matemática; Estudo das Concepções e Conhecimentos; Ensino de Geometria.

Referências

Lovis, K. A. (2009). *Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o*

que pensam e o que sabem os professores. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 148f.

Nacarato, A. M. (2000). *Educação Continuada sob a Perspectiva da Pesquisa-Ação: Currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando Geometria*. Tese (Doutorado em Educação) – Unicamp, Campinas. 223f.

Ponte, J. P. (1992). *Concepções dos professores de matemática e processos de formação. Educação matemática: temas de investigação*. Lisboa. Acesso em 28 de novembro de 2011, disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DOCS-PT/92ponte(Ericeira). doc.

Thompson. A. G. (1997). *A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Zetetiké*, (5)8, 11-43.

❖❖❖

Resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas. Una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas

Nixo Núñez Sánchez
Universidad Señor de Sipan - Perú
nnunez@pucp.edu.pe

Resumen

En ésta investigación especificamos la elaboración, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica orientada a superar las dificultades que tienen los estudiantes, tanto en la comprensión de los proceso de resolución de inecuación cuadrática, como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático. La secuencia fue diseñada teniendo como marco teorico a la Teoría de Situaciones Didácticas y a la ingeniería didactica como método de investigación. Las actividades propuestas inducen a los estudiantes a pasar por las situaciones de acción, formulación y validación y fueron diseñadas teniendo en cuenta los conocimientos previos que se requieren sobre desigualdades y con fuerte apoyo gráfico y algebraico en la función cuadrática,

Palabras clave: Inecuación Cuadrática, Situaciones Didacticas

Introducción

La enseñanza de las inecuaciones y en especial las inecuaciones cuadráticas que se imparten desde la educación secundaria y se extiende hasta los niveles universitarios, en la mayoría de los casos están orientados a indicar los procesos de resolución, a su manipulación algebraica y a la utilización de procesos rutinarios, sin poner énfasis en su comprensión y en su aplicación a problemas contextualizados; tales acciones mecanizan al estudiante en proceso algebraicos, sin entender porque lo hacen o cual es una explicación lógica de tales procesos, estos hechos propician dificultades en la resolución de las inecuaciones cuadráticas, confusión en los procesos de

resolución con los de una ecuación y dificultades en la interpretación de los signos de la desigualdad.

Investigaciones hechas con inecuaciones revelan tales resultados; Alvarenga (1999, citado en Barbosa, 2003, p. 201) señaló "identifique muchos errores en su interpretación y sobre todo en su resolucion"; Blanco, L., Garrote, M. & Hidalgo, J. (2004) determinaron que "La ausencia de significados es uno de los principales problemas que se plantean en el trabajo con inecuaciones…" (p. 43). Asi mismo Gallo y Battú (1997, citado por Borello, 2010, p. 22) observan "En la didáctica de las desigualdades se ocupan técnicas sin atribuirles algún significado, implementando modelos rígidos que se aplican en forma correcta pero impropia".

Estas investigaciones revelan la problemática y dicen de la relevancia de la investigación, centrando nuestro interés en proponer una secuencia didáctica para superar las dificultades identificadas.

Objetivos de la Investigación

- Diseñar una secuencia didáctica con actividades y problemas de dificultad graduada, que contribuyan a la construcción del concepto de inecuación cuadrática y a comprender sus procesos de resolución.
- Aplicar la secuencia didácticas y analizar resultados comparando los efectos esperados y los observados en el marco de la teoría de situaciones didácticas.
- Rediseñar las secuencias didácticas ejecutadas inicialmente considerando los resultados de la experimentación en el aula.

Marco Teórico

Consideramos a la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual es un modelo para abordar la enseñanza de la matemática. Esta teoría esta sustentada en la teoría psicogenética de Piaget donde "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones de dificultades, de desequilibrios, un

poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau 1986, p. 14); afirmandose que un medio sin intenciones didácticas es incapaza de inducir en la adquisición de los conocimientos que se desea aprender, por lo que se busca condiciones para garantizar el aprendizaje.

Metodología

Se consideró a la Ingeniería didáctica, que según Artique (1995) "como metodología de investigación la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las realizaciones didáctica en clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Esta metodología consta de 4 fases y en la investigación se realizaron los siguientes procedimientos:

Análisis preliminar: compuesta por un conjunto de análisis asociados a la inecuación cuadrática, a las características cognitivas de los estudiantes, a los procesos de enseñanza, recursos y estrategias utilizadas en la institución donde se realizó la investigación.

La concepción y análisis a priori: Se consideraron los análisis previos y se definieron las variables para la concepción de las secuencias.

La experimentación: puesta en escena de las actividades diseñadas y se recogio información relevante.

Análisis a posteriori y validación: se realizó con los datos recogidos de la experimentación, tales como argumentaciones, actitudes, reflexiones, justificaciones y producciones de los estudiantes. El proceso de validación es interno confrontando el análisis a priori y a posteriori.

Visión general de la Secuencia Didáctica

La Secuencia Didáctica esta compuesta por cuatro actividades, existen momentos de trabajo individual o grupal. Las tres

primeras se inician con problemas contextualizados y en la cuarta actividad se induce a la comprensión de procesos algebraicos en la resolución de inecuación cuadrática. En las actividades propuestas se inducen a pasar por las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización.

Determinación de las variables

Variables Macro-didácticas: Dentro de estas variables se consideró la organización de trabajos grupales (ocho grupos de tres integrantes, unidos libremente); al inicio de cada actividad se distribuyó el material con la descripción de la situación didactica y las secuencias a seguir.

Variables Micro-didácticas: Se consideraron las siguientes variables, teniendo en consideración que no son las únicas que existen.

a) **Signo de la desigualdad.** Inecuación cuadrática con signo $\geq$ o $\leq$

b) **Tipo de trinomio cuadrático.** Inecuación cuadrática con trinomio cuadrático:

- Factorizable en R donde su conjunto solución puede ser un intervalo, unión de intervalos o un conjunto unitario.
- No factorizable en R donde su conjunto solución puede ser los números reales o el conjunto vacío.

Variables en las actividades de aprendizaje

Actividad de aprendizaje	**Variables Didácticas**
Actividad 1: Construyendo un Jardin. Problema con inecuación cuadrática	✓ Desigualdad: ≤ ✓ Trinomio cuadrático factorizable en R
Actividad 2: Formulación de procedimientos para resolver graficamente una inecuación cuadrática.	✓ Desigualdad: ≥ ✓ Trinomio cuadrático factorizable en R

Actividad 3: Solución grafica de inecuación cuadrática con trinomio cuadrático	✓ Desigualdad: ≥ ✓ Trinomio cuadrático no factorizable en R
Actividad 4: solución algebraica de inecuación cuadrática.	✓ Desigualdad: ≤ y ≥ ✓ Trinomio cuadrático factorizable y no factorizable en R

Actividades diseñadas

Se diseñaron cuatro actividades, por motivos de espacio, solo presentaremos la actividad 1. Donde se especifican los momentos individual y grupal.

Actividad 1: Construyendo un jardín

Situación

Juan posee un terreno cuadrado y luego de recortarlo 2 m. a cada lado, obtiene un jardín cuadrado cuya área no excede los 9 m^2.

Trabajo individual

a) Emplea una variable x, e ilustra gráficamente la situación. Explica qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que has definido en (a), representa el área del terreno y el área del jardín.

Área del terreno: ----------

Área del jardín: ----------

c) Expresa algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del jardín no exceda los 9 m2.

d) Encuentra dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

e) Determina dos posibles valores que no puede tomar la variable definida en (a), según el contexto del problema

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$

h) Encuentra todos los posibles valores de la longitud del terreno cuadrado.

Trabajo grupal Parte I:

Los integrantes del grupo deben comparar y examinar los resultados obtenidos en el trabajo individual.

Entregar la hoja del trabajo individual con las soluciones que el grupo considera más adecuadas, para los ítems f, g y h.

Trabajo grupal Parte II:

Situación

María tiene un terreno cuadrado de 6 metros por lado y quiere comprar franjas de terreno a sus vecinos, de modo que su terreno siga siendo cuadrado, pero de un área que no exceda los 64 m^2.

a) Emplear una variable x, e ilustrar gráficamente la situación. Explicar qué representa la variable.

b) Utilizando la variable que definida en (a), representar el área del terreno ampliado.

Área del terreno ampliado: ----------

c) Expresar algebraicamente la relación que debe cumplirse para que el área del terreno ampliado no exceda los 64 m^2.

d) Encontrar dos posibles valores de la longitud del terreno cuadrado ampliado. ¿Cuáles son los dos correspondientes valores de la variable x?

e) Determinar dos posibles valores que no puede tomar la variable x definida en (a), según el contexto del problema

f) Escribe la expresión obtenida en (c) de modo que se tenga $f(x) \leq 0$, siendo f una función cuadrática.

g) Grafica la función f y determina gráficamente el conjunto de valores de x para los cuales se cumple que $f(x) \leq 0$

h) Encuentra todos los posibles valores del ancho de las franjas con las que se puede ampliar el terreno, según la condición dada.

Conclusiones

- Las actividades aplicadas sirvieron para lograr los objetivos de entender los procesos de resolución de inecuación cuadrática y su aplicación en problemas contextualizados.
- En las primeras actividades se detectaron dificultades en la fase de acción por las limitaciones en el uso de conocimientos previos y en la comprensión de textos.
- La fase de formulación resulta particularmente importante para aclarar confusiones teóricas y errores de procedimiento que ocurrieron en la fase de acción.
- Algunos errores operativos y de graficación de la función cuadrática dificultaron la determinación del conjunto solución limitando el proceso de validación.

Referencias

Artigue, M. y otros. (1995) Ingeniería Didáctica en educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana. S.A. de CV, Bogotá.

Barbosa, K. (2003). La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *6* (3), 199-219.

Blanco, L., Garrote, M. & Hidalgo, J. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma* 46, 37-44

Borello, M. (2010). *Un planteamiento de resignificación de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor. Un enfoque socioepistemológico*. (Tesis de Doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional, México). Recuperado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/borello_2010.pdf

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de las teorías de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libro del Zorzal.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

❖❖❖

Aplicações da sequência fedathi: sobre o ensino de pontos críticos e de inflexão no (version del libro de resúmenes)

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará - Brasil
fregis@ifce.edu.br

Hermínio Borges Neto
Universidade Federal do Ceará – Brasil
hermínio@mulmeios.ufc.br

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidad Católica-Perú
kvingar21@gmail.com

Resumo

Identificamos a escassez de trabalhos relacionados ao ensino/aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis – CVV, entretanto, a produção de investigações versando sobre o Cálculo em Uma Variável Real- CUV, preserva forte vigor há décadas. Em uma tese (ALVES, 2011) de doutorado desenvolvida no Brasil, encontramos a discussão do processo de transição interna do CUV para o CVV, no contexto de aplicação da metodologia de ensino conhecida no Brasil como Sequencia Fedathi, a partir de uma proposta de complementaridade com Duval (2011). A transição do CUV para o CVV, é marcada por fatores que podem atuar como entraves ao entendimento e compreensão dos principais conceitos do CVV. Dentre os conceitos importantes no estudo do CUV, destacamos a noção de ponto crítico e ponto de inflexão. Os livros didáticos de CUV no Brasil exploram estes conceitos de modo restrito ao, todavia, com o auxílio computacional, e assumindo os pressupostos da Sequencia Fedathi, possibilitamos o entendimento dos aprendizes com respeitos a estas noções no contexto do CVV. A Sequencia Fedathi prevê as fases de ensino: (i) tomada de posição; (ii) maturação; (iii) solução; (iv) prova. As fases de ensino foram adaptadas ao ensino do CVV e com a intenção de considerar as

variáveis didáticas formação, tratamento, conversão e a coordenação de registros de representação semiótica. Os resultados teóricos mostram que se pode evitar as deficiências detectadas nos livros de CVV e, deste modo, por intermédio da visualização, os alunos têm a possibilidade de compreender as noções de ponto crítico e ponto de inflexão no contexto do CVV. Situações-problema estruturadas a partir deste metodología envolvem a compreensão que as habilidades adquiridas no contexto do CUV podem ser re-adaptadas no CVV.

Palavras chave: Sequência Fedathi, Cálculo, Representação.

Referências

Alves, Francisco. R. V. (2011*). Aplicações da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis* (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 350p.

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. In: *Educação Matemática Pesquisa*. v. 13-3, 597-626, Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/archive. Acesso em: 25 dez. 2011.

Borges Neto, Hermínio. et al. (2001). A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, XV EPENN - *Encontro de Pesquisa Educacional* Do Nordeste, São Luis, 590-609.

Duval, Raymond. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem. v. 1.

Martinez-Plannel, Rafael; Gaisman. Maria. T. (2009). Student´s ideas on functions of two variables: domain, range and representations. In: *Proceedings of annual meeting of*

Psychology of Mathematics Education. Atlanta, GA: Georgia State University, 73-80.

❖❖❖

Levantamento bibliográfico: o caso da Matriz Hessiana de uma função real de várias variáveis

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-Brasil
kvingar21@gmail.com

Maria José Ferreira Da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-Brasil
zeze@pucsp.br

Resumo

Esta é uma revisão bibliográfica a respeito do ensino da matriz Hessiana de funções em várias variáveis, e é parte desses resultados que apresentamos no presente artigo. A metodologia é a pesquisa bibliográfica e para a coleta de dados selecionamos bibliotecas de pós-graduação e, anais de congressos de educação matemática. Fizemos a busca a partir dos descritores "Cálculo em várias variáveis", "funções de várias variáveis", "máximos e mínimos em várias variáveis" e "optimização". Não encontramos nenhum trabalho que tratasse de funções com mais de duas variáveis.

Palavras chave: A Matriz Hessiana de uma função real de várias variáveis. Cálculo em uma e várias variáveis. Revisão bibliográfica.

1. Introdução.

Buscando a prática de engenheiros, economistas, físicos e matemáticos identificamos que grande parte dos problemas que enfrentam, profissionalmente, envolve prioritariamente funções reais de várias variáveis: pressão atmosférica, distribução de temperatura dentro de um corpo, a pressão dentro do fluido, o potencial eletrostático, densidades populacionais, grandezas econômicas, grandezas mecânicas. Por outro lado, no segundo ano de cursos de engenharia de algumas universidades de São Paulo apresentam, em sua matriz curricular, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral que envolve o estudo de funções reais de várias variáveis, a

disciplina analisa de forma coesa e ordenada a estrutura lógica dos tópicos que são desenvolvidos, ligados ao conceito de diferenciabilidade de funções sem relacioná-lo a conceitos usados em Física, Mecânica, Fenomênos de Transporte ou em outras disciplinas do curso de Engenharia. Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais, é a da otimização de funções. Otimizar uma função, significa encontrar seu desempenho máximo ou mínimo. Como para as funções de uma variável, quando as derivadas primeiras forem nulas, teremos pontos extremos que podem ser máximos ou mínimos, já para as funções reais de várias variáveis, para saber de que tipo são esses pontos, teremos de utilizar a matriz Hessiana calculada nesses pontos. Assim, pela importância das aplicações dessas funções nos interessamos por estudar essa matriz.

2. Revisão da literatura

A fim de fazer uma revisão bibliográfica a respeito desse tema, nos baseamos em Cresswell (2010, p. 51) para quem "a revisão da literatura proporciona uma estrutura para estabelecer a importância do estudo e também uma referência para comparar os resultados com outros resultados". A metodologia é a pesquisa bibliográfica que define procedimentos de maneira sistemática para captar, avaliar e resumir a literatura. Começamos identificando as palavras-chaves que utilizaríamos para localizar os materiais nas bibliotecas de pós graduação da PUC-SP, UNESP e USP, o banco de teses da CAPES, a revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, bem como os anais dos congressos de RELME, CERME e ICME e o *site* da Springer. Essas palavras-chave emergiram na identificação do tema e foram "Cálculo em várias variáveis", "funções de várias variáveis", "máximos e mínimos de funções em várias variáveis" e "optimização".

Até o momento encontramos duas dissertações de mestrado, três teses de doutorado e quatro artigos que tratam do ensino e da apredizagem do Cálculo Diferencial e Integral para funções de duas variáveis e nelas buscamos o problema que

está sendo tratado, o objetivo central ou o foco do estudo, examinar os resultados fundamentais relacionados ao estudo proposto, identificar os teóricos utilizados.

As duas dissertações de mestrado são de Marcos de Miranda Paranhos, defendida na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no ano 2009, sob o titulo "Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral" e a de Roberto Seidi Imafuku, defendida também na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, no ano 2008, intitulada "Sobre a passagem do estudo de função de uma variável real para o caso de duas variáveis". As três teses de doutorado são de Afonso Henriques defendida na Université Joseph Fourier-Grenoble, Alpes, em 2006, intitulada "L'enseignement et L'apprentissage dês integrales multiples: Analyse didactique integrant l'usage du logiciel maple", a tese de Gerar Emile Grimberg, defendida na Faculdade de Filosofia da USP-SP, no ano de 2000, sob o título "A constituição da teoria das funções de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna" e a tese de Francisco Regis Vieira defendida na Universidade Federal do Ceará, em 2011 sob o titulo "Aplicações da Sequência Fedathi na promoção das categorias do raciocínio intuitivo no cálculo a várias variáveis". No que diz respeito aos artigos, três deles tratam de pesquisas feitas fora do Brasil. O artigo dos pesquisadores Mariana Montiel, Draga Vidakovic, Iwan Elstak e Miguel Wilhelmi da Universidade de Georgia (USA) e a Universidade de Navarra (Espanha) intitulado "Using the onto-semiotic approach to indentify and analyze mathematical meaning in a multivariate context" no Cerme 6, working group 12, no ano de 2009 em Lyon – França. O artigo dos pesquisadores Maria Trigueros e Rafael Martínez do Instituto Autónomo de Mexico e da Universidade de Puerto Rico, respectivamente sob o título "Geometrical representations in the learning of two-variable functions" publicado on- line em 2009 no journal Educational Studies in Mathematics. O terceiro artigo dos pesquisadores Sebastian Xhonneux e Valérie Henry da Universidade de Namur de Bélgica intitulado "A didactic survey of the main characteristics of Lagrange's theorem in mathematics and in economics" publicado no Cerme 7, working group 14, no ano

de 2011 em Rzeszów-Polônia e finalmente o artigo feito em Brasil das autoras Néri Terezinha Both e Rosimary Pereira intitulado "O software "MAPLE" no estudo de funções de várias variáveis", publicado na "Educação Matemática em Revista", n° 17, em 2004 pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

2.1. Dissertações e Teses

Paranhos (2009) propõe o problema que as idéias de derivada e integral não ficam bem compreendidas pela maioria dos alunos que lamentavelmente aprendem apenas procedimentos algébricos que acrescentam pouco à sua capacidade de analisar e resolver problemas. Frente a esse problema o autor viabilizou formas de apresentar as idéias fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral e suas aplicações na resolução de problemas com o objetivo de fazer um estudo a respeito das idéias fundamentais desse conteúdo envolvendo funções com uma e duas variáveis. O autor inspirado pela possibilidade do uso de softwares no ensino do Cálculo e fundamentado didaticamente na Dialética Ferramenta-Objeto e no Jogo de Quadros de Régine Douady. O autor, finalmente, considerou que o aspecto novo que sua pesquisa trouxe foi a questão da representação e do tipo de abordagem.

Imafuko (2008) destaca as dificuldades no curso de Matemática, com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, na qual se estudava as funções, suas propriedades, limites, derivadas e integrais. O autor pôde perceber que os estudantes apresentavam dificuldades para determinar os limites de integração tanto para integral dupla como para tripla, bem como no estudo de vários teoremas, principalmente aqueles que envolviam continuidade, limite e derivada. O objetivo de sua pesquisa foi verificar as dificuldades e os saberes manifestados por estudantes durante a transição do estudo de funções de uma variável para o caso de duas, no trabalho com variáveis dependentes e independentes, a interdependência entre elas, ao domínio, ao gráfico, e a relação entre o gráfico do domínio e o gráfico da função e, também, quais manifestações

eram reveladas no estudo das derivadas parciais de primeira ordem.

O autor elaborou dois questionários fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, tendo em vista que este autor acredita que muitas das dificuldades dos estudantes estejam relacionadas à representação do conceito, em diferentes registros.

Henriques (2006) apresenta um trabalho que trata do ensino e da aprendizagem de Integrais Múltiplas e suas aplicações no cálculo de áreas e volumes, utilizando o software Maple como ferramenta. O autor ressalta que um dos estudos preliminares para Cálculo de Integrais Múltiplas é o estudo de funções de várias variáveis reais: propriedades, domínio, representação gráfica, continuidade, curvas e superfícies de nível, gradiente, derivação parcial etc. Para o autor, a representação gráfica no espaço assume então um status diferente para o estudo de integrais múltiplas em comparação aos estudos preliminares aplicados ao cálculo de integrais. Assim, o objetivo de seu trabalho é compreender as dificuldades encontradas pelos alunos e estudar em que medida a utilização de um software como o Maple poderia ajudá-los a superar essas dificuldades, e favorecer a interação entre representação gráfica e representação algébrica dos objetos matemáticos tratados no trabalho. Visando o desenvolvimento de seu trabalho em torno do ensino e aprendizagem das Integrais Múltiplas, o autor estudou as abordagens teóricas que permitiram análises de um dado objeto matemático em vários registros de representação, pois lhe permitiu precisar o que chamou de representação gráfica e representação algébrica de um sólido nos problemas de cálculo de volume por Integrais Múltiplas. Além disso, o autor apoiou-se na abordagem antropológica do didático e por utilizar o ambiente computacional, esses estudos teóricos o conduziram a considerar a dimensão instrumental da aprendizagem em ambientes computacionais.
Grimberg (2000), adotando uma linha filosófica procurou estudar o nascimento e a constituição da Análise Moderna no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. O autor

mostrou, ao longo de sua pesquisa, como a Análise tornou-se uma linguagem com aspectos formais característicos de uma teoria matemática: simbolismo, operações e operadores, tornando o cálculo diferencial e integral um cálculo formal.

Em seu trabalho, Vieira (2011) apresenta um estudo sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a Várias Variáveis cujo objetivo foi a identificação/descrição das categorias de raciocínio intuitivo no cálculo a varias variáveis ao longo das fases do ensino a partir da metodologia denominada Sequência Fedathi. O autor ressalta a estruturação e a concepção de situações didáticas de ensino envolvendo situações-problema diferenciadas que dizem respeito aos rituais algorítmicos identificados nos livros didáticos de Cálculo a Várias Variáveis, foram atingidos com base numa visão de complementaridade entre a Teoria das Representações Semióticas e as categorias do raciocínio intuitivo descrita por Fischbein e exploradas nas quatro fases previstas pela Sequência Fedathi. O autor enfatizou a descrição da transição interna do Cálculo em uma variável para o Cálculo em Várias Variáveis, em seguida, com a intenção de delinear, caracterizar, discutir e compreender a natureza do principal raciocínio que quer registrar. Finalmente, aponta como conclusões que a exploração didática de categorias do raciocínio intuitivo, com base em uma mediação didática que envolveu a exploração de registros de representação semiótica, proporcionou a evolução do conhecimento do estudante a respeito dos conceitos principais do Cálculo em Várias Variáveis.

2.2. Artigos.

Em seu artigo, Montiel, Wilhelmi, Vidakovic e Elstak (2009) apresentam um estudo que envolveu o aspecto do pensamento relacionado à matemática avançada. Os autores destacaram que o estudo em educação matemática ao nível universitário é relativamente escasso e por isso não pode ser dado como certo que a compreensão matemática nesse nível não seja problemática. O objetivo principal deste trabalho foi aplicar a

abordagem onto-semiótica para analisar o conceito matemático de diferentes sistemas de coordenadas, bem como algumas situações e ações de estudantes universitários relacionados a esses sistemas.

Os autores apontaram como conclusão que a abordagem onto-semiótica permite uma estrutura de análise dos objetos matemáticos e de tudo o que está envolvido na comunicação de idéias matemáticas, o que permite esboçar uma riqueza de instrumentos desenvolvidos no estudo da semiótica.

O artigo de Trigueiros e Martinez apresenta um trabalho a respeito de como os alunos trabalham com duas variáveis com o objetivo de investigar a relação entre a noção que os alunos têm dos subconjuntos do espaço cartesiano tridimensional e a compreensão de gráficos de funções de duas variáveis. A teoria APOS e a teoria das Representações Semióticas foram usadas como referencial teórico e o trabalho foi desenvolvido com nove alunos que já tinham feito um curso de cálculo em várias variáveis.

Os autores concluiram que esse estudo forneceu informações a respeito das dificuldades dos alunos na compreensão de funções de duas variáveis, em particular, a generalização de funções de uma variável para funções de duas variáveis.

Os autores Xhonneux e Henry apresentam, em seu artigo, uma pesquisa que se concentrou no ensino do Teorema de Lagrange, em cursos de Matemática e Economia com os objetivos de descrever uma metodologia para analisar os processos de Transposição Didática para o teorema de Lagrange nos cursos universitários e, também, de utilizar a Teoria Antropológica do Didático para comparar os conteúdos das disciplinas de Cálculo de dois cursos nas Universidades de Namur e Louvain. Finalmente os autores concluíram que como os livros didáticos não representam efetivamente o conhecimento matemático "ensinado", seria necessário realizar outras análises para aceder de modo mais profundo às práticas dos professores e às percepções dos alunos.

Em seu artigo, Carvalho e Pereira apresentam um trabalho que tratou da utilização do software Maple V como ferramenta para o estudo de gráficos de funções de várias variáveis e de curvas de nível com estudantes de duas classes, uma do curso de Engenharia e outra do curso de Física. Segundo as autoras, na análise dos gráficos os alunos realizam uma interação entre os níveis teórico e gráfico e essa manipulação permite a visualização e a explicitação do conteúdo, objeto da atividade. As autoras apontam, em suas conclusões, que o fato de os alunos não identificarem a superfície que representa a função estudada, os leva a aceitar o gráfico apresentado no computador, sem muito questionamento, o que pode implicar em uma interpretação errônea do gráfico..

Conclusões

Muitas dessas investigações nos mostram a natureza das dificuldades dos estudantes com relação às noções do cálculo em duas variáveis nos anos iniciais em cursos da Universidade. Os autores advertiram que a aplicação de uma concepção estrutural dos conceitos, abordada a partir de sua definição formal, acarreta algumas dificuldades em termos de compreensão principalmente, quando se apoiam na transição de funções de uma variável para funções de varias variáveis. Alguns autores insistiram, também, na importância da interação entre diferentes representações para generalizar os principais aspectos dessas funções e identificar as mudanças nas propriedades fixas de cada tipo de função ou representação. Até o momento temos encontrado nesta revisão bibliográfica pesquisas que tratam de funções em duas variáveis reais, mas não encontramos trabalho algum que tratasse de funções com mais de duas variáveis. Este resultado está nos conduzindo a aprofundar nossa revisão e buscar caminhos para ampliar o ensino para esse tipo de função, pois acreditamos que esse ensino propiciaria a construção de conhecimentos mais significativos para os alunos porque se apoiaria em aplicações em problemas reais.

Referencias

Creswell John, W. (2010). *Projeto de Pesquisa. Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto*, (3ra ed). São Paulo: Artmed editora S.A

Emile Grimberg, G. (2001) *A Constituicao da teoria das funcoes de várias variáveis no século XVIII: o início da análise moderna*. Dissertacao publicada de Doutorado em Filosofia. Universidade de São Paulo. Brasil

Miranda Peranhos, M. (2009). *Geometria Dinâmica e o Cálculo Diferencial e Integral*. Dissertação publicada de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Sao Paulo-Brasil.

Montiel, M., Wilhelmi, M., Vidakovic, D., Elstak, I. (2009). Using the Onto-semiotic approach to indentify and analyze mathematical meaning in a multivariate context. *European society for research in mathematics education*.12, (p. 2286-2295).

Seidi Imafuku, R. (2008). *Sobre a Passagem do Estudo de Funcao de uma Variável Real para o Caso de Duas Variáveis*. Dissertação publicada de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Sao Paulo-Brasil.

Trigueros, M., Martínez, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studyies Mathematical* 73, 3-19.

Vieira Alves, F.R. (2011). *Aplicações da Sequencia Fedathi na promocao das categorias do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis*. Tese publicada de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Ceará-Brasil.

Xhonneux, S., Henry V. (2011). A didatic survey of the main characteristics of Lagrange's tehorem in mathematics and in economics. *European society for research in mathematics education*. 14, 1-10.

❖❖❖

Um olhar sobre objetos de aprendizagem como metodologia no ensino da matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Vera Lucia S. S. Gregorio
UENF- RJ- Brasil
veragregorio@gmail.com

Nilson Sergio Peres Stahl
UENF- RJ-Brasil
nilsonstahl@ig.com.br

Resumo

Nesta pesquisa buscamos analisar e verificar a eficácia da utilização do objeto de aprendizagem (OA) Decifrando mapas, tabelas e gráficos desenvolvidos pela UNIJUÍ/ RIVED, no ensino do conteúdo Funções, tendo como referência a presença e a efetivação das atividades cognitivas pressupostas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2004).

Introdução

No Brasil, o ensino da matemática, destaca-se como um dos principais problemas da educação, nos diferentes níveis de ensino, de acordo com os dados divulgados pelo INEP-Instituto nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, relacionados aos resultados da avaliação, PISA, 2003. *Mais de ¼ dos alunos brasileiros, mexicanos, portugueses, espanhóis, norteamericanos e uruguaios estiveram na mesma faixa de desempenho, sem alcançar o nível 2 de uma pontuação de 0 a 6.* (INEP, 2012)

A abordagem interativa, propiciada pelos objetos de aprendizagem, nos parece ser uma atitude científica relevante**,** considerando a importância de uma aprendizagem

significativa[3] onde se estabelece entre outras ações, novas formas de diálogo com o aluno. Nesta perspectiva o conteúdo é contextualizado, ministrado de modo que os alunos se tornam atores do processo e não meramente espectadores

Entendemos que para compreendermos como acontece a aprendizagem dos alunos, em especial na matemática, torna-se necessário abordar as funções e as influências que as representações externas exercem na compreensão de conceitos matemáticos.

Faz-se necessária desta forma, a nosso ver, uma concepção de ensino que privilegie as descobertas do educando na formação de um futuro cidadão crítico e seguro.

Tema matemático abordado: Funções

O OA utilizado tem como objetivo interpretar e descrever relações apresentadas em tabelas e gráficos; calcular variações entre grandezas, resolvendo problemas práticos relacionados ao seu dia-a-dia, tais como: estimar o tempo necessário para deslocar-se de uma cidade A até uma cidade B; determinar a distância percorrida após certo período de tempo; estabelecer a velocidade média utilizada para percorrer certa distância; calcular o custo de uma viagem levando em consideração o consumo de combustível; ·Reconhecer fatores que influenciam no comportamento gráfico de uma função.

Quadro teórico e metodológico

Objetos de Aprendizagem – OA. De acordo com Jacobsen (2002) o termo objetos de aprendizagem começa a ser cunhado há quase dez anos e embora seja "difícil determinar quando e quem o cunhou" (tradução lvre) o crédito é dado a Wayne Hodgins.

[3] Teoria de aprendizagem de David Ausubel, que se caracteriza pela *interação cognitiva* entre o novo conhecimento e o conhecimento prévio. (Moreira, 2010)

A partir da criação desse termo surgiram inúmeras tentativas de definições buscando uma caracterização mais clara e objetiva do que se entende por OA. Apresentamos na figura 1 um quadro síntese dos eventos históricos que refletem a visão de Jacobsen (2002), em relação aos OA:

Figura 1: Síntese histórica

Data	Instituição	Evento
1992	Wayne Hodgins	Peças interoperáveis de aprendizagem
1992 a 1995	CEdMA Grupo de metadados de OA do *National Institute of Science and Technology*	Início dos estudos com metadados (incluindo modularidade centricity, banco de dados e objetos de marcação)
1994 a 1996	1-IEEE, IMS E ARIADNE 2-Oracle (www.oracle.com) 3-Tom Kelly e Chuck Barritt, da Oracle, mudaram-se para a Cisco Systems	1- Começaram a trabalhar na área objeto de aprendizagem 2-Uma das primeiras tentativas de criação de um ambiente utilizando objetos de aprendizagem, Oracle Learning Application (OLA). Nunca foram concretizadas
1998	Cisco Systems	Continuou seu trabalho com objeto de aprendizagem, que culminou com o lançamento do *Cisco's white paper on Reusable Learning Objects*
2000 a 2001	*Cisco's white paper on Reusable Learning Objects*	Este livro, em conjunto com o trabalho dos Comitês de padrões da indústria eespecificações, fez muito para alavancar RLOs de toda a indústria.

A partir de 2002	Toda a comunidade envolvida em *Learning Objects.*	Estabelecimento de debates importantes como: o contexto para o ensino eficaz garantindo a máxima reutilização do objeto;Granularidade do objeto será resolvido em grande parte como uma das melhores práticas; O problema de como projetar o conteúdo para ser utilizado em diferentes meios instrucionais com destaque como tecnologia que permite a entrega para a *Web*, CD, *paper* e *WAP*; a batalha sobre a melhor forma de projeto para diversos meios será travada, mas não será vencida em curto prazo.

Fonte: *From "Reusable Learning Objects- What does the future hold?"*

A concepção de objetos e de reutilização originou-se da programação orientada a objetos – P. O. O - (Wiley, 2000). Esta concepção valoriza grandemente a criação de componentes (chamados "objetos") que podem ser reutilizados (Dahl & Nygaard, 1966 *apud* Willey, 2000). Este é o principal objetivo por trás dos OA. Esta concepção foi idealizada para tentar aproximar o mundo real do mundo virtual: a idéia fundamental é tentar simular o mundo real dentro do computador.

De acordo com este modelo, na produção de componentes didáticos digitais, segundo Sá Filho e Machado (2004) os OA são considerados blocos de conteúdo educacional independente, que podem fazer referência a outros blocos e podendo ser combinados ou seqüenciados para formar outras interações educacionais.

Fundamentação na Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

De acordo com Duval (2003) a compreensão de um conceito matemático passa pela capacidade de se diferenciar o objeto matemático da representação que o torna compreensível. Para o autor, *"(...) os objetos matemáticos (...) não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos"* (p.14) e o acesso aos objetos matemáticos acontece por meio da utilização de uma representação interna ou externa.

Representações Mentais e Semióticas

Duval (2003) diz que as representações podem ser mentais e semióticas. As mentais são aquelas que privilegiam o tratamento da informação, que por sua vez é caracterizada pela execução automática de determinada tarefa. As semióticas por sua vez, são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que tem suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. A escrita em língua natural, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos são exemplos de representação semiótica.

Segundo o autor, o uso de diferentes representações semióticas contribui para uma reorganização do pensamento do aluno e influencia sua atividade cognitiva, ou seja, são indispensáveis para a compreensão dos conceitos matemáticos.

Ainda segundo o autor, a teoria dos registros de representação semiótica pode ser vista pelo docente, como uma opção para auxiliar na compreensão de como melhor organizar situações de aprendizagem na disciplina.

Radford *et a*l (2011, tradução livre) afirma que "*por causa de seu foco em signos e significados, a semiótica é bem adequada para investigar o ensino da matemática e processos de aprendizagem".*

Ainda segundo o autor, *"Semiótica traz consigo explicações teóricas de como os sinais significam. Oferece condições de como trabalhar significados, como os sujeitos os produzem e usam, e também como, em produzi-los, os indivíduos tornam-se sujeitos de significado*."

Duval (2003) utiliza a expressão **registro de representação semiótica** para caracterizar um registro que apresenta algumas características:

1- **Representação identificável:** Quando é possível reconhecer na representação, no caso da matemática, o objeto matemático que representa.
2- **Tratamento**: Consiste na transformação de uma representação em outra pertencente ao mesmo registro de partida
3- **Conversão**: Consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação desse mesmo objeto em outro registro
4- **Coordenação**: Propõe que se estabeleçam situações de aprendizagem que favoreçam a coordenação dos registros, onde o sujeito faça uso de diferentes registros de representação semiótica sobre um determinado objeto matemático.

De acordo com Flores (2008), "A contribuição de Duval para o processo ensino aprendizagem em matemática está em apontar a restrição de se usar um único registro semiótico para se representar um mesmo objeto matemático". Desta forma torna-se necessária a utilização de mais de um registro para que não se confunda o objeto com sua representação.

Metodologia: De acordo com os objetivos deste trabalho de pesquisa utilizamos a abordagem metodológica qualitativa como suporte na interpretação e análise dos dados. A respeito da narureza qualitativa da pesquisa Bogdan e Biklen (1994) afirmam que é aquela em que o investigador procura entender o processo pelo qual as pessoas constroem significados e descrevem o que são esses significados.

A coleta dos dados, nesta pesquisa, se dá por meio da observação direta dos alunos, diários de campo e questionários.

Utilizaremos nesta pesquisa, para analisar a eficácia do OA trabalhado, os conceitos de Duval (2003) no que concerne às atividades cognitivas que o aluno precisa efetivar para que de fato ocorra a aprendizagem em matemática. No OA utilizado será verificado se e quais atividades cognitivas se fazem presentes.

Principais resultados:

O OA utlizado possibilitou atividades envolvendo registros: em língua natural, tabular, algébrico e gráfico. A figura 2 apresenta os resultados coletados.

OA	Categoria 1 Representação Identificável	Categoria 2 Tratamento	Categoria 3 Conversão	Categoria 4 Coordenação	Total de alunos presentes
ATIVIDADE RIVED: UNIJUI **Decifrando Mapas, Tabelas e Gráficos**	16	09	08	07	16

Figura 2: Dados do OA- Utilizando mapas, tabelas e gráficos

De acordo com estes dados obtidos podemos observar que 07 educandos compreenderam o conteúdo estudado de forma integral. A totalidade dos educandos atingiu a categoria 1 que evidencia a identificação do conteúdo em estudo, demonstrado na figura 2., propiciada pelo AO

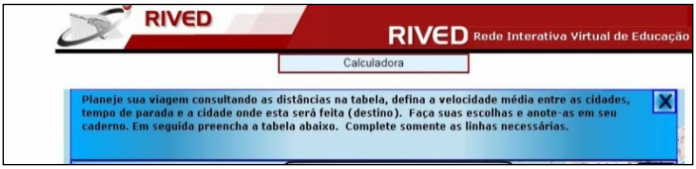

RIVED
RIVED Rede Interativa Virtual de Educação
Calculadora
Planeje sua viagem consultando as distâncias na tabela, defina a velocidade média entre as cidades, tempo de parada e a cidade onde esta será feita (destino). Faça suas escolhas e anote-as em seu caderno. Em seguida preencha a tabela abaixo. Complete somente as linhas necessárias.

Figura 2: Categoria 1

Do total de alunos, 9 deles realizaram o registro de tratamento o sendo a prática mais freqüente entre os professores o que não permite a educando, na maioria dos casos, avançar para outros registros. Esta categoria está demonstrada na figura 3 onde os alunos realizaram atividades utilizando somente o registro tabular.



Figura 3: Categoria 2

A categoria conversão que consiste na transformação da representação de um objeto matemático em uma representação desse mesmo objeto em outro registro, segundo Duval (2004) foi atingida por 08 alunos. Esta categoria está demonstrada na figura 4, onde os alunos converteram o registro tabular em registro gráfico.

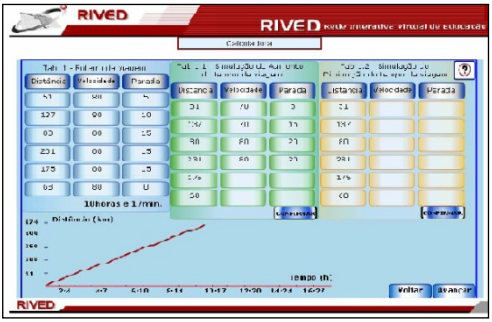


Figura 4: Categoria 3

De acordo com estes dados obtidos podemos observar que 07 educandos compreenderam o conteúdo estudado de forma integral, ao coordenar diferentes registros (tabular, gráfico e algébrico) do mesmo objeto matemático, como mostra a figura 5.

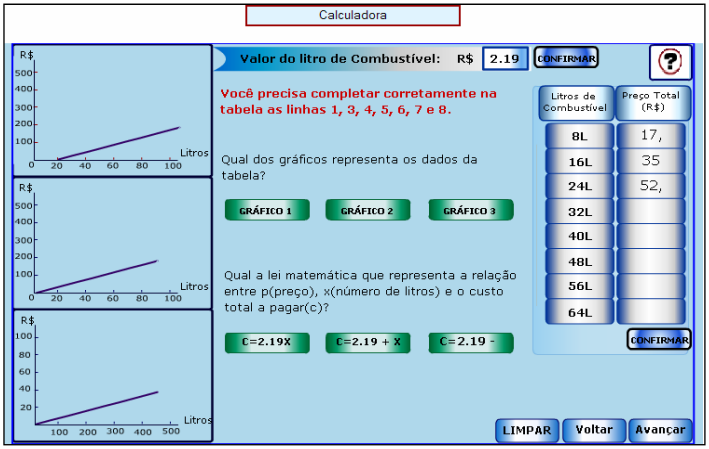


Figura 5: Categoria 4

Conclusão:

Diante do explicitado constatamos que dos 16 alunos participantes da atividade com OA metade compreendeu o objeto em estudo, conseguindo realizar os registros de

tratamento e conversão. Verificamos ainda ser possível a realização dos registros preconizados por Duval (2003) para a compreensão e construção do conhecimento, neste caso específico para o conteúdo: Funções, com a utilização de OA.

Podemos concluir que é plenamente viável a utilização de OA como recurso facilitador para o ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente àqueles que contemplem e propiciem ao educando a experimentação das diversas representações semióticas.

Referencias

Bogdan, R. e Biklen, S. *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora, 1994.

Duval, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Matemática.* In: MACHADO, Silvia D.A. *Aprendizagem em matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: editora papirus, 2003, p.11-34.

_____ . *Semiosis y pensamiento humano*: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Tradução de Myriam Veja Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle,Instituto de Educación y Pedagogi, Grupo de Educacion Matemática, 2004.

Flores, Claudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema. Acesso em 21/08/2010

INEP- PISA, 2003 Brasil. Disponível em: http://download.inep.gov.br/download/internacional /pisa/result_pisa2003_resum_tec.pdf

Jacobsen, P. e-learning Magazine, November 1, 2002 Disponível em: http://www.elearning mag. com (...) Acesso em 12/10/11

Moreira, Marco Antonio. **Aprendizagem significativa crítica** Instituto de Física da UFRGS . Disponível em http://www.famema.br/semanadeplanejamento/aprendizagem significativacritica.pdf. Acesso em 10/10/11

Radford et al . *Signifying and meaning-making in mathematical thinking, teaching, and learning.* Educational Studies in Mathematics: Volume 77, *Numbers 2-3 / July 2011*

SÁ Filho, Clovis Soares e Machado & Elian de Castro. *O computador como agente transformador da educação e o papel do objeto de aprendizagem*. Disponível em http://noticias.universia.com.br/destaque/noticia/2004/12/17/493049/ Acesso em 10/05/11

Vertuan, R. A. Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação semiótica. 2007. 141 *Dissertação* - Universidade Estadual de Londrina.

Wiley, D.A. Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy**.** In D. A. Wiley (Ed.). *The Instructional Use of Learning Objects (2000).* Versão online: http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

❖❖❖

EXPERIENCIAS DIDÁCTICAS

Musimática

Virginia Coronado
Pontificia Universidad Católica del Perú
vickycoronado@hotmail.com

Irma Flores
Pontificia Universidad Católica del Perú
ifloresb@pucp.edu.pe

Resumen

Musimática es una propuesta metodológica novedosa que propone el uso de la música y sus elementos como herramienta para favorecer y garanticen el reconocimiento y adquisición de capacidades y conceptos necesarios para la Matemática.

Objetivos:

1. Brindar un espacio, a los participantes para que a través de la exploración del campo sonoro, rítmico, musical descubran sus capacidades expresivas que les permitan establecer vínculos seguros con la matemática.
2. Favorecer un espacio de reflexión en el cual se puedan identificar los beneficios del campo sonoro, rítmico musical en el desarrollo del aprendizaje de la matemática.
3. Presentar información obtenidas obre los avances dela metodología adecuada para vincular el aprendizaje de la matemática con la música.
4. Analizar qué capacidades están inmersas en el aprendizaje de la matemática y la música de manera simultánea.
5. Realizar actividades matemáticas que fundamentales para el desarrollo de capacidades. Partan de la experimentación con ritmos y sonidos para relacionar de manera práctica la música con la matemática.

En la actualidad, estereotipos de diversos tipos, paradigmas del pasado, así como la falta de metodologías activas que

involucren a los escolares en el aprendizaje han contribuido a crear constantes manifestaciones de rechazo hacia la Matemática. Creemos que es una tremenda equivocación.

La idea de Musimática surgió de la experiencia en el aula así como de la experiencia de editar textos escolares de Matemática teniendo siempre la preocupación de encontrar e incluir todo aquello que pudiera garantizarle, a los niños, la adquisición de habilidades matemáticas.
En esa búsqueda, encontramos que la música y sus elementos se vinculan directamente con la experiencia de los niños y las niñas.

¿Tiene la música alguna relación con la matemática? Pitágoras descubrió que sí, al comenzar los estudios sobre la proporción matemática de los sonidos. Esto hizo concebir la música como una materia, en el sentido de fisicidad. El gran aporte de Pitágoras consistió, sobre todo, en el estudio de las proporciones del sonido tomando como base un instrumento llamado monocordio.

Para Musimática la matemática es una manera de pensar y actuar, poniendo en práctica la intuición, es el arte de tratar de ver qué sucederá cuando decides hacer algo sin tener que hacerlo realmente. Es un concepto relacionado a la acción en la búsqueda de solución de problemas cotidianos.

Así, la Música tiene una influencia predominante en la rutina diaria de los seres humanos al llamar la atención de sus sensaciones y emociones e impactar en sus afectos a través de los sonidos y sus bellas formas.

Y la Matemática es una actividad humana en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas. En la búsqueda de soluciones y respuestas a estos problemas surgen progresivamente técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones socialmente compartidas.

En estos cinco años de existencia de Musimática hemos podido constatar y confirmar que es cierto: la Música y sus elementos,

sonido, ritmo, armonía y melodía, impactan afectivamente en los niños y las niñas y los comprometen en la construcción de sus habilidades matemáticas.

En Musimática buscamos que los niños y las niñas puedan crear una noción para conocer un contexto y otra noción para enfrentar otro contexto diferente. Esto a partir de una experiencia vivificadora y placentera, porque más allá de que la Matemática sea una ciencia que hay que saber, la Matemática es una ciencia que hay que comprender, y no es posible comprenderla sino se tiene suficiente experiencia práctica con ella. Por eso, en Musimática estamos comprometidos con una experiencia afectiva en contacto permanente con situaciones problemáticas cotidianas.

Referencias

Aaron Copland. (1985) *Cómo escuchar la Música*. México D.F. Fondo de Cultura económica.

Federico Gabriel F. (2005). *El Embarazo Musical*. Buenos Aires, Editorial Kier S.A.

Federico Gabriel F. (2007). *Para el bebé antes de nacer*. Buenos Aires, Editorial Kier S.A.

Paul R. Lehman (2007). *¿Por Qué Estudiar Música en la Escuela?* Artículo traducido: Last Updated (Wednesday, 03 January 2007).

Gardner, H. (1987). *Estructuras de la mente: La teoría de las múltiples inteligencias*. México, Fondo de la Cultura Económica.

Lanciani Albino. (2001). *Mathématique et Musique*. Grenoble France, Éditions Jerôme Millon.

Manson John. (1997). *L'ésprit mathématique*. Paris, France, De Boeck & Larcier S.A.

❖❖❖

La Geometría analítica en nuestro entorno

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú
eadvincula@pucp.edu.pe

Edwin Villogas Hinostroza
Pontificia Universidad Católica del Perú-Perú
evillogas@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo resulta de una experiencia realizada con estudiantes del primer ciclo de Estudios Generales Ciencias, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, en el curso Matemática Básica.

Esta experiencia responde a la intención de contribuir con el aprendizaje significativo de la geometría analítica, específicamente de las rectas y cónicas, mostrando la utilidad del conocimiento de estos conceptos matemáticos en el diseño de objetos de nuestro entorno cotidiano. Para esto, se diseño una actividad que incluía las representaciones, algebraica y gráfica, de rectas y familias de cónicas, que permitirían obtener el diseño del soporte de una banca de un parque, usando el software matemático Winplot o Geogebra.

Esta actividad se diseñó de forma cooperativa ya que esto permitiría que los alumnos desarrollen la habilidad de argumentar e intercambiar información usando un lenguaje matemático adecuado.

Palabras clave: Geometría analítica, Winplot, Geogebra y actividad cooperativa.

Presentación de la actividad

La actividad se dividio en tres partes: una primera parte individual, una segunda parte en parejas y una parte final en grupos de cuatro.

En la primera parte, el trabajo fue individual con el fin de explorar sobre los conocimientos que traían los estudiantes sobre las rectas y cónicas. Las preguntas de esta parte fueron:

PARTE I: Individual.Tiempo: 10 min

Considere una elipse E con centro en el origen de coordenadas, eje focal paralelo al eje X e inscrita en un rectángulo de 8 unidades de largo y 4 unidades de ancho.

a) Halle la ecuación de la elipse E.
b) Escriba la ecuación de una circunferencia con centro en el eje Y, y cuya intersección con el rectángulo y con la elipse E sea un solo punto. Ilustre gráficamente y diga si tal circunferencia es única.

En esta primera parte los objetivos fueron: determinar la ecuación de una elipse a partir de algunos elementos, determinar la ecuación de una circunferencia dada algunas condiciones; y reconocer, bajo ciertas condiciones, la existencia de una familia de circunferencias.

En la segunda parte, se propuso que dos parejas trabajen en forma simultánea. Una pareja debería determinar la ecuación de una familia de parábolas y verificar la intersección con una circunferencia y dos rectas; mientras que la otra, debería determinar la ecuación de una familia de elipses y verificar la intersección con una circunferencia y dos rectas.

A continuación se muestran las preguntas de la primera pareja.

PARTE II: Pareja 1. Tiempo: 40 min

a) Halle la ecuación de la familia de parábolas que tienen como eje focal al eje Y, vértice $V(0;k)$ y longitud de lado recto igual a 20 unidades. Esboce las gráficas de las parábolas P_1 y P_2 de esta familia, que se abren hacia arriba, para $k=3$ y $k=6$, respectivamente.

b) Si P_3: $x^2 = -32y - 4k^2$ es una de las parábolas de la familia de parábolas que tienen como eje focal al eje Y, vértice V $(0;k)$ y longitud de lado recto igual a $|4k|$, calcule el valor de k y grafique dicha parábola.

c) ¿La circunferencia $x^2 + (y+4)^2 = 2$ interseca a la parábola P_1?

d) Halle los puntos de intersección de la parábola P_2 con las rectas de ecuaciones: $x = 10$ y $x = -10$.

En esta pareja 1, los objetivos fueron: determinar la ecuación de una familia de parábolas dadas ciertas condiciones, determinar la ecuación y la gráfica de una parábola específica correspondiente a dicha familia, y determinar los puntos de intersección de una parábola con una circunferencia o con rectas verticales.

A continuación se muestran las preguntas de la segunda pareja.

PARTE II: Pareja 2. Tiempo: 40 min

a) Halle la ecuación de la familia de elipses con centro en $(0;-27)$, eje focal paralelo al eje X, longitud del eje mayor igual a $(2a)$ y excentricidad igual a $\frac{3}{5}$. Esboce las gráficas de las elipses E_1 y E_2, de esta familia, para $a = 15$ y $a = 20$, respectivamente.

b) Si $E_3: \frac{x^2}{625} + \frac{(y+27)^2}{16k^2} = 1$ es una de las elipses de la familia de elipses determinada en la parte a), calcule el valor de k y grafique dicha elipse.

c) ¿La circunferencia $x^2 + (y+4)^2 = 4$ interseca a la elipse E_1?

d) Halle los puntos de intersección de la elipse E_2 con las rectas de ecuaciones: $x=10$ y $x=-10$.

En esta pareja 2, los objetivos fueron los mismos que para la pareja 1, pero respecto a una familia de elipses.

En la tercera parte, se propuso un trabajo en grupos de 4, con los intregrantes de las parejas 1 y 2 pues se pedía resolver un problema que requería del aporte de las dos parejas. En un primer momento, se pido obtener el diseño del soporte de una banca de un parque que involucraba trabajar con ecuaciones y gráficas de parábolas, elipses, circunferencias y rectas, siguiendo ciertas instrucciones. Pero, en un segundo momento, se pidió que los alumnos creen un nuevo diseño de soporte de una banca, que incluya formas cónicas y rectas.

En esta parte los alumnos utilizaron el software Winplot o Geogebra, que tuvieron que aprender a manipular previamente, como herramienta de trabajo que les permitiría mejorar la presentación de sus gráficos y obtener nuevos diseños de forma rápida.

A continuación se muestran las preguntas de esta parte.

Parte III: Trabajo grupal. Tiempo: 60 min

Una empresa dedicada a la venta de bancas pretende lanzar al mercado un modelo de banca similar al que se encuentra en la PUCP, como se puede apreciar en las siguientes imágenes.





En este nuevo modelo de banca, cada una de las partes laterales es de fierro y tiene un diseño que incluye formas de circunferencias, parábolas y semielipses.

Dadas las parábolas: $P_1 : x^2 = 20(y-3)$ y $P_2 : x^2 = 20(y-6)$, y las elipses: $E_1 : \frac{x^2}{225} + \frac{(y+27)^2}{100} = 1$ y $E_2 ; \frac{x^2}{400} + \frac{(y+27)^2}{256} = 1$.

Se pide lo siguiente: Muestre el diseño de la parte lateral del nuevo modelo de banca siguiendo las siguientes instrucciones:

a) Trace un sistema de coordenadas cartesianas, con unidades dadas en centímetros.
b) Trace las parábolas P_1 para $-24 \le x \le -10$ y $10 \le x \le 20$, y P_2 para $-22 \le x \le -10$ y $10 \le x \le 18$.
c) Sombree la región comprendida entre las curvas trazadas en b).
d) Al intersectar las rectas $x = 10$ y $x = -10$ con la parábola P_2 se obtienen los puntos A y B, respectivamente; mientras que con la elipse E_2 se obtienen los puntos C y D, respectivamente. Trace el rectángulo ABCD.
e) Trace la circunferencia C_2 con centro en (0; -1) y radio igual a 6 cm.
f) Sombree la región comprendida entre el rectángulo ABCD y la circunferencia C_2.
g) Trace la semielipse superior correspondiente a E_2 para $-20 \le x \le -10$ y $10 \le x \le 20$.
h) Trace la semielipse superior correspondientes a E_1.
i) Sombree la región comprendida entre las curvas trazadas en g), h) y el segmento $\overline{CD}$.

j) Trace dos segmentos horizontales, uno que pase por el punto (0; 16) y otro por el punto (0; 18), y cuyos extremos pertenecen a la parábola P_2.
k) Sombree la región comprendida entre los segmentos trazados en j).
l) Usando el programa Geogebra o Winplot, elabore un nuevo modelo de banca que incluya: parábola, elipse o circunferencia (mínimo dos curvas). Indique sus respectivas ecuaciones.

Los objetivos en esta parte fueron: determinar las ecuaciones de párabolas, elipses, circunferencias y rectas, graficar parábolas y elipses con algunas restricciones, graficar circunferencias, graficar rectas verticales y horizontales, determinar los puntos de intersección de rectas con parábolas o elipses, y reconocer las ventajas de usar un software como Winplot o Geogebra para graficar parábolas, elipses, circunferencias o rectas, así como para realizar cambios de forma rápida.

Conclusiones

Durante el trabajo en aula los resultados obtenidos fueron satisfactorios pues se observó un gran nivel de interactividad entre los estudiantes, al trabajar en parejas o en grupos, pues tuvieron la oportunidad de intercambiar información y resultados, exponiendo distintos puntos de vista, mostrando tolerancia y capacidad de trabajo en equipo.

También, se observó un alto grado de motivación al resolver los problemas planteados, específicamente, al obtener el diseño del soporte de las bancas, usando los softwares Winplot o Geogebra, pues estos les permitían realizar variaciones de forma rápida e interactiva. Lo que mostraba una ventaja notoria respecto al trabajo con lápiz y papel.

Finalmente, podemos decir que se cumplieron los objetivos de esta actividad pues los alumnos reconocieron la presencia de las cónicas en el medio que nos rodea, y la importancia del

estudio de estas ya que pueden ser incluidos en el diseño objetos de nuestro entorno cotidiano.

Referencias

Almeida, et al. (1994). Metodología de la enseñanza de la matemática (Tomo I). México: Universidad Autónoma de Sinaloa. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, Ciudad de la Habana, Cuba.

Geogebra. Software disponible en: http://geogebra.en.softonic.com/

Guzman, M.(1999). Tendencias innovadoras en educación Matemática .Lima: Moshera.

Lehmann, Ch. (1980). Geometría analítica. México, D.F.: Limusa.

Lima, E. (2004). Geometría analítica. Traducción de Percy Fernández. Lima: IMCA.

López, J. (2003). La integración de las TICs en Matemáticas. Publicación de este documento en EDUTEKA. Recuperado el 05 de diciembre de 2011, de: http://www.eduteka.org/Editorial18.php
Winplot. Software disponible en: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Bosch, M. & Gascón, J. (2006). *Twenty-Five Years of theDidactic Transposition*. Recuperado el 5 de febrero de 2011, de: http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICMI_bulletin/58.pdf

Bolea, P.; Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(3), 247-304.

❖❖❖

La Geometría de la loza deportiva y el modelo de situaciones de actividades instrumentales

Magna Fernández Contreras
Institución Educativa Mixta "Telésforo Catacora" – Perú
a19906048@pucp.pe

Roger Díaz Villegas
Institución Educativa Mixta "Telésforo Catacora" – Perú
a20112918@pucp.pe

Candy Ordoñez Montañez
Institución Educativa Mixta "Telésforo Catacora" - Perú
a20112918@pucp.pe

Resumen

La presente socialización, es resultado de una experiencia que se llevó a cabo en la Institución Educativa Mixta "Telésforo Catacora" UGEL 06 Dpto. de Lima, con 36 alumnos de segundo grado de Secundaria. Los alumnos tenían conocimientos previos de: punto, recta, plano, perpendicularidad, paralelismo, simetría, punto medio y circunferencia; sin tener experiencia alguna sobre el software Cabri 3D. Esta actividad se propuso como objetivo rescatar la geometría de la loza deportiva y mostrar el dinamismo del software Cabri 3D por medio del modelo de Situaciones de Actividades Instrumentales (SAI) de Rabardel (1995). Pensamos que esta experiencia es valiosa, ya que es necesario para el aprendizaje mirar la geometría que hay en nuestro alrededor; vivenciar los objetos matemáticos en una contensión y manejo del medio ambiente natural y social; como menciona D´Ambrosio(1988). Por otra parte, consideramos que el software Cabri 3D ofrece muchas ventajas para la enseñanza de geometría; ayuda a los alumnos a concebir las propiedades de las figuras geométricas y a su vez visualizarlas de forma rápida y eficaz; encontrando apoyo de este dominio en las dimensiones del proceso de la génesis instrumental.

Palabras clave: Cabri 3D, Génesis Instrumental, Etnomatemática, Modelo SAI.

Introducción

Dentro de la enseñanza de la geometría generalmente no se logra que los alumnos se apropien eficazmente de los conceptos geométricos. Existen trabajos y experiencias como "Génesis instrumental en una interacción con cabri 3D: en un estudio de transformaciones geométricas en el espacio" Sao Paulo – 2009; que muestran que las tecnologías y en particular el software Cabri 3D se presenta como una alternativa interactiva para la enseñanza de la geometría, y teniendo en cuenta que estamos inmersos en un mundo tridimensional; resultando así necesario comprender, visualizar e interactuar con el espacio en el que nos desarrollamos.

El software Cabri 3D es un medio útil en el que se puede simular construcciones hechas en lápiz y papel, en forma dinámica en el plano; representar figuras geométricas tridimensionales que hay en nuestro alrededor como es el caso de una loza deportiva. Además las bondades de este software; asociado al proceso de la génesis instrumental (transformación de artefacto a instrumento) como lo menciona Rabardel (1995); permite construir, observar, explorar, manipular las figuras geométricas, asimismo; comprender, conjeturar, verificar y relacionar las propiedades geométricas. De otro lado; es necesario que la enseñanza de la matemática debe tener en consideración la realidad socio cultural del alumno, en el ambiente en que vive y el conocimiento que trae de casa; como lo menciona Ubiratan D´Ambrosio (2003). En conclusión; consideramos que la exploración de la matemática en nuestro alrededor D´Ambrosio (2003), unida al dinamismo que nos ofrece el software Cabri 3D y asociado al proceso de la génesis instrumental Rabardel (1995); contribuyen a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Ejecución de la experiencia de socialización

Esta experiencia se desarrolló en cuatro sesiones:

Sesión 1:(90 min)
Exploración de la loza deportiva bajo una secuencia de preguntas:

- ¿Qué objetos matemáticos observas en la loza deportiva?
- Representa gráficamente la loza deportiva de la I.E. con lápiz y papel.

Sesión 2:(120 min)

- Exploración del software Cabri 3D v2, con asesoramiento del docente.
- El alumno construye la base de la loza deportiva, y traza las perpendiculares para los tableros.

Sesión 3:(90 min)

- El profesor da a conocer a los alumnos, correcciones de las imprecisiones de sus trabajos anteriores.
- El alumno vuelve a realizar la construcción de la sesión anterior; agregando el tablero y la canasta.

Sesión 4:(90 min)

- El profesor corrige las imprecisiones de los trabajos de los alumnos guardados anteriormente.
- El alumno construye la loza deportiva de una manera completa; haciendo uso de la simetría axial.
- Se aplica un cuestionario en base a preguntas de conocimiento y apreciación del software.

En la sesión 1 los alumnos usan materiales para obtener las dimensiones de la loza. A partir de la sesión 2 se hace uso del software Cabri 3D; además, se observó el proceso de la génesis instrumental en la sesión 4, aunque 6 alumnos lograron este proceso en la sesión 3.

Análisis de los resultados

Los alumnos que cursaban el segundo grado de secundaria ya tenían conocimiento previo de ciertos conceptos geométricos que se dio uso para la construcción de la loza deportiva en el software Cabri 3D. Observamos que los alumnos trabajaron las actividades motivados, puesto que el instrumento del

software Cabri 3D les facilitó el desarrollo de esta actividad de una manera nueva e interesante. Por último se tiene que 10 de los 12 grupos (3 alumnos por grupo) presentaron la construcción de la loza con el software de una manera satisfactoria, relacionando los conceptos geométricos (conocimientos previos) para dicha construcción; como se muestran en las figuras.



Fig. 1: Exploración de la loza deportiva

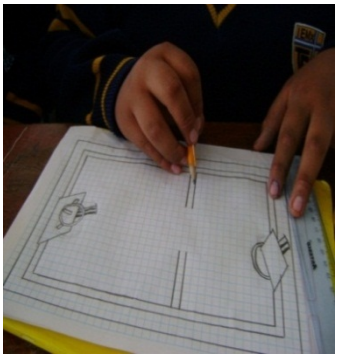


Fig. 2: Graficando la loza con lápiz y papel



Fig. 3: Asesoramiento del docente



Fig. 4: Exploración del software Cabri 3D

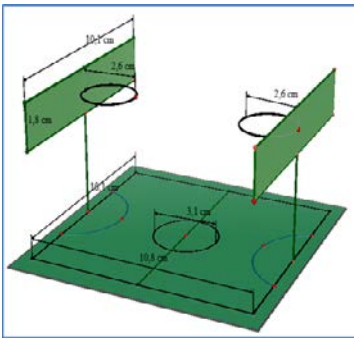


Fig. 5: Construcción de la loza deportiva

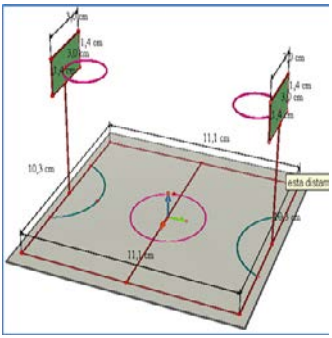


Fig. 6: Construcción de la loza deportiva

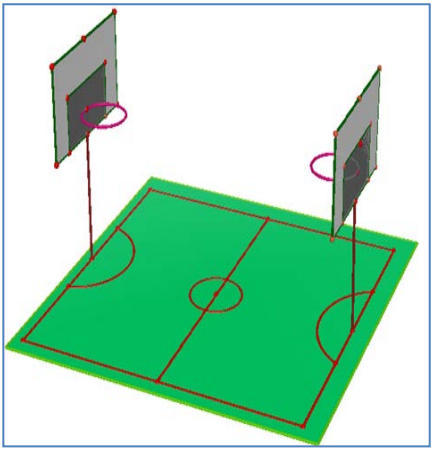


Fig. 7: Construcción de la loza deportiva

Referencias

CABRI 3D, Manual do usuario. Disponible en: http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/c3dv2/user_manual_pt_br.pdf

D´Ambrosio, U. (1988). Etnomatemáticas: Um programa de investigación em la historia de las ideas y em la cognición.pag.1-3.

D´Ambrosio, U. (2003). Etnomatemáticas. Diário Na Escola Santo André.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Rabardel Pierre & Bourmaud Gatan (2006). From computer to instrument system: a developmental perspective.pag.670-678.

Salazar, J.V.F. (2009). Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço. Tesis (Doctorado en Educación Matemática), Pontificia Universidad Católica de São Paulo, São Paulo. pag. 63-80

❖❖❖

Comprendiendo la existencia de un triángulo usando geogebra como recurso didáctico

Maritza León Jordán
maritzaleonj@hotmail.com

Resumen

Esta experiencia se realizó con alumnos del 2do año de educación secundaria, de un colegio privado de Lima, en el tercer bimestre escolar del año 2011, motivado por los resultados de una de las preguntas de un cuestionario aplicado sobre el tema de Triángulos. En dicha pregunta se hacía referencia a la existencia de un triángulo. La mayoría de las respuestas no fueron correctas, fue por ello que me propuse hacer una sesión en la que usando el software Geogebra los alumnos pudieran trabajar en torno a esta propiedad y logren entenderla. Los objetivos de dicha experiencia fueron: analizar las respuestas de los alumnos al construir un triángulo dados tres segmentos con medidas conocidas y promover la comprensión de la relación de existencia de un triángulo usando el software de geometría dinámica Geogebra.

*Palabras clave***:** Triángulo, registro figural dinámico, Geogebra.

Introducción

La existencia de un triángulo se verifica estableciendo una relación de desigualdad entre las medidas de sus lados. Se menciona en el libro Matemática 2 (guía metodológica) de Santillana (2008), acerca de esta propiedad lo siguiente: "En todo triángulo se cumple que la medida de uno de sus lados es menor que la suma de las medidas de los tros dos y es mayor que su diferencia". Esta relación no siempre es enseñada en la escuela cuando se introduce el tema de triángulos, ya sea en la primaria o secundaria. Alguna vez hemos observado en los libros de texto de Matemática dibujos de triángulos que en términos de la teoría de Raymond Duval llamaríamos registros figurales y registros mixtos de triángulos, pero algunas de

estas representaciones muestran medidas erróneas de los lados del triángulo, no cumpliéndose así dicha relación.

Considero importante que al iniciar el tema de triángulos y desde la primaria se trabaje con los alumnos *la existencia del triángulo* como un medio para que los alumnos comprendan mejor el concepto de triángulo y se establezca un espacio para que aprendan a verificar, una destreza importante en el aprendizaje de las matemáticas. Hoy en día existen softwares matemáticos de geometría dinámica, uno de ellos es el *Geogebra.* En este software puedes trabajar con geometría y álgebra. Con la función geométrica de este programa, se pueden hacer construcciones de figuras geométricas en 2D, usando una serie de pasos sencillos. Creo que este programa es muy útil para introducir conceptos en geometría, pues una vez hecha la construcción de una figura, la puedes alterar, mover, y esto, hace que se generen conclusiones de acuerdo a un objetivo planteado. Las representaciones realizadas en este programa toman el nombre de *registro figural dinámico*. Según Salazar (2011), dicho registro toma ese nombre porque es utilizado en ambientes de geometría dinámica. En el presente trabajo expongo la experiencia realizada con alumnos de 2do año de secundaria, donde trabajé con ellos la existencia del triángulo con ayuda del software de geometría dinámica *Geogebra*.

Objetivos y desarrollo de la experiencia

En el tercer bimestre escolar del año 2011, trabajé con los alumnos del 2do año de secundaria del Colegio privado Champagnat, la propiedad que relaciona la existencia de un triángulo con la medida de sus lados. Las sesiones que comprendieron ésta fueron dos y se limitaron a presentar la propiedad y hacer que los alumnos verificaran si existe un triángulo dado las medidas de tres segmentos para que sean sus lados. En esas sesiones los alumnos mostraron comprender en su mayoría la propiedad. Luego de cuatro meses les apliqué un cuestionario (cuadro Nº1) con la finalidad de saber si recordaban la propiedad de la existencia de un

triángulo y otros conceptos más trabajados. En los resultados se observó que *21 de 30 estudiantes respondieron erróneamente* la pregunta 3, en la que aparece el registro figural de un "triángulo" con las medidas de sus lados, pero la representación presentaba un error que ellos debían de advertir o darse cuenta. Los resultados indicaron que no pasó eso. Algunas de las respuestas no correctas se presentan en el cuadro Nº2. En las respuestas correctas o esperadas se evidencia una buena comprensión de la propiedad. Fue por ello que me propuse hacer una sesión en la que usando el software Geogebra los alumnos puedan trabajar en torno a esta propiedad y logren entenderla mejor. Aprovechano además los conceptos previos que ya tenían desarrollados.

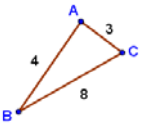
Los objetivos de esta experiencia fueron: analizar las respuestas de los alumnos al construir un triángulo dados tres segmentos con medidas conocidas y promover la comprensión de la relación de existencia de un triángulo usando el software de geometría dinámica Geogebra.

Cuadro Nº1

CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un triángulo?
2. ¿Qué tipo de triángulos conoces? Nómbralos.
3. ¿La siguiente figura representa un triángulo? ¿Existe un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 8? Justifica tu respuesta.



4. Representa un triángulo donde dos de sus lados midan *4cm* y *2cm* respectivamente y formen estos un ángulo de 60º. Luego señala qué tipo de triángulo es.
5. Representa un triángulo donde dos de sus lados midan *5cm* y 6*cm* respectivamente y formen estos un ángulo de 40º. Luego señala qué tipo de triángulo es.
6. Representa un triángulo donde dos de sus lados midan *7cm* y *4cm* respectivamente y formen estos un ángulo de 120º. Luego señala qué tipo de triángulo es.

Cuadro Nº2

Alumno 1: Sí, porque tiene tres lados y son diferentes (triángulo escaleno).
Alumno 2: Sí, porque tiene tres lados y toda figura geométrica que tenga tres lados es un triángulo.
Alumno 3: Sí, porque tiene tres segmentos que son unidos por un punto llamado vértice.
Alumno 4: Sí, es un triángulo escaleno porque sus tres medidas son distintas.

La sesión se diseñó para una clase de dos horas pedagógicas de 40 minutos cada una. Se utilizó en dicha sesión una computadora y una pizarra inteligente. Las indicaciones se dieron en una hoja de papel y se formaron 8 grupos de 4 alumnos, los cuales se formaron libremente. Se plantearon tres situaciones que podemos ver en el cuadro Nº3. Dos a tres representantes de cada grupo salieron a hacer las construcciones. Mientras uno de los representantes salía a participar, los demás observaban lo que hacía. Luego cuando se cumplía el objetivo, regresaban a su lugar y en forma grupal respondían a las preguntas. Se observó motivación constante y predisposición para trabajar con el software (se familiarizaron previamente con el programa en otras sesiones del curso). En la situación 1, seis de los ocho grupos respondieron con precisión que no era posible construir un triángulo cuyos lados midan 2, 3 y 5. Cinco grupos incluso mostraron la regla estudiada anteriormente, en ellas, se evidencia un predominio del lenguaje natural en lugar del registro algébrico. En las figuras 1, 2 y 3 podemos observar el *registro figural dinámico* que hicieron los alumnos para dar respuesta a dicha situación. En la situación 2, seis grupos respondieron que sí es posible formar un triángulo cuyos lados midan 4, 6 y 8 porque las circunferencias formadas se intersectan en dos puntos, con lo cual se formarían dos triángulos congruentes, (ver figura 4). Los dos grupos restantes no precisaron muy bien sus respuestas. En la situación 3, seis grupos respondieron que no era posible formar un triángulo cuyos lados midan 3, 7 y 11, porque las circunferencias formadas no se intersectaron en

ningún punto, (ver figura 5). En sus respuestas, seis de los ocho grupos escribieron la verificación de la existencia de un triángulo, colocando ¡absurdo!, ¡no es posible!, ¡no cumple!, ¡no se puede!, cuando no cumplía la desigualdad. En las justificaciones dadas se observa un predominio del lenguaje natural.

Cuadro Nº3

ACTIVIDAD: EXISTENCIA DE UN TRIÁNGULO

RECURSO: GEOGEBRA 3.0

Situación 1

1. Construye un triángulo, cuyos lados midan 2, 3 y 5, usando los siguientes segmentos con dichas medidas (ver pantalla). Estos segmentos deben unirse entre sí por sus puntos extremos.
2. ¿Lo hecho en la pregunta 1 nos da seguridad de la existencia del triángulo?, ¿Existirá el triángulo con tales medidas de sus lados?, ¿Por qué?

Situación 2

Observa los segmentos y sus medidas 4, 6 y 8(ver pantalla), luego, sigue los siguientes pasos para averiguar la existencia de un triángulo cuyos lados sean los segmentos dados:

(a) Activa el sexto botón de la barra de herramientas (circunferencia dados su centro y un punto). (b) Toma como centro el punto color rojo y el azul como otro punto de la circunferencia. Haz esto con dos segmentos. (c) Mueve las circunferencias (haciendo clic izquierdo en el punto centro de la circunferencia) y haz que coincida el centro con los puntos extremos del segmento que quedó libre. (d) Activa el segundo casillero en la opción "intersección de dos objetos". (e) Haz clic izquierdo en cada circunferencia. (f) Observa donde aparece el punto de intersección y haz que coincida cada punto extremo libre con ese punto.
¿Qué observas? ¿A qué conclusión llegas?

Situación 3

Con los pasos dados en la situación 2, verifica la existencia de un triángulo cuyas medidas de sus lados son: 3, 7 y 11.

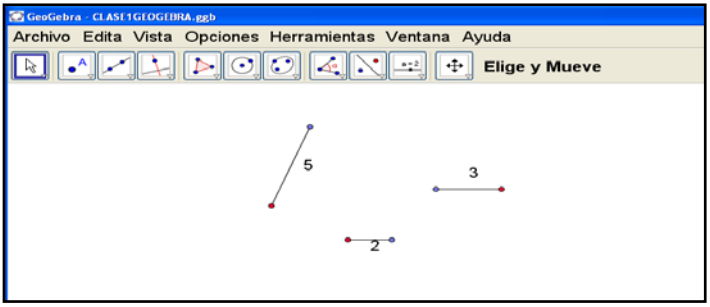


Figura Nº 1

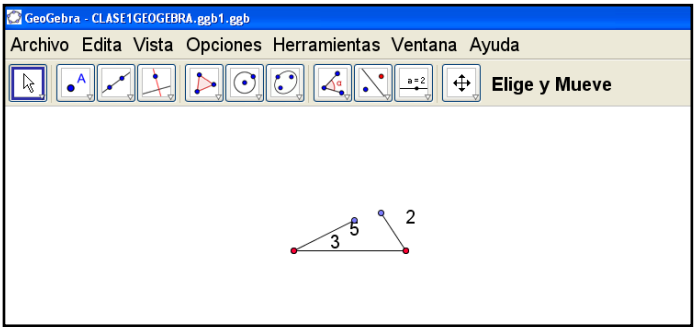


Figura Nº 2

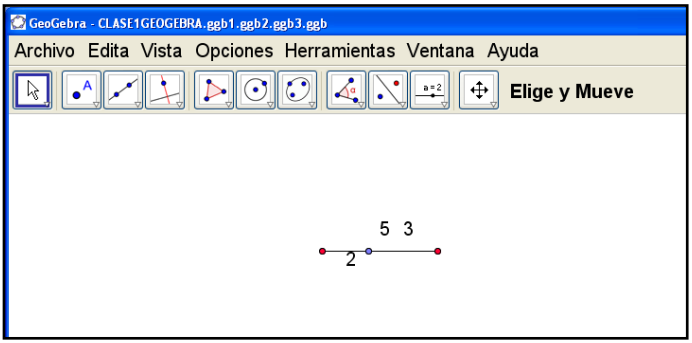


Figura Nº 3

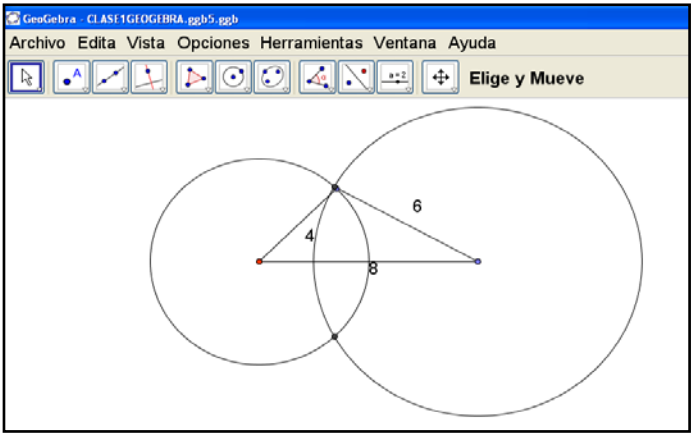


Figura Nº 4

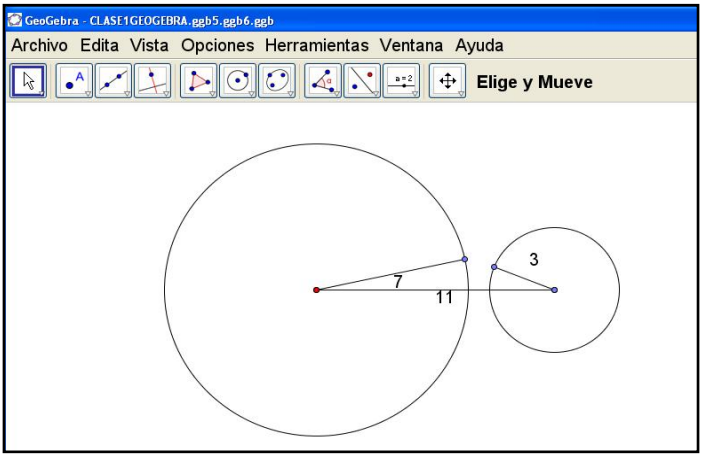


Figura Nº 5

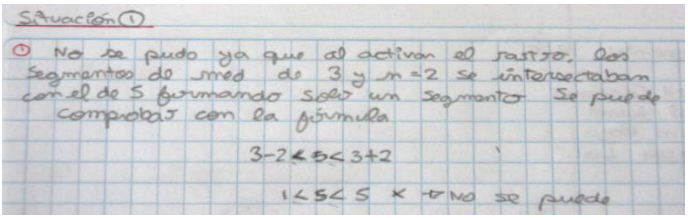

Situación ①
① No se pudo ya que al activar el rastro, los segmentos de med de 3 y n=2 se intersectaban con el de 5 formando solo un segmento se puede comprobar con la fórmula
3-2 < 5 < 3+2
1 < 5 < 5 ✗ ∴ No se puede

Figura Nº 6

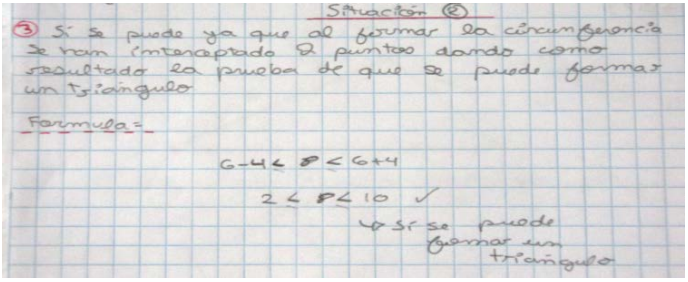

Situación ②
③ Sí se puede ya que al formar la circunferencia se han intersectado 2 puntos dando como resultado la prueba de que se puede formar un triángulo
Formula=
6-4 < 8 < 6+4
2 < 8 < 10 ✓
∴ Sí se puede formar un triángulo

Figura Nº 7

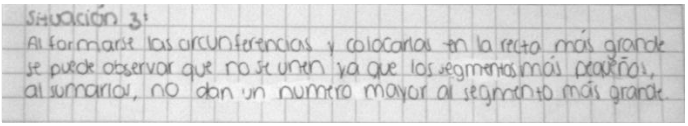

Situación 3:
Al formarse las circunferencias y colocarlas en la recta más grande se puede observar que no se unen ya que los segmentos más pequeños, al sumarlos, no dan un numero mayor al segmento más grande.

Figura Nº 8

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos se puede decir que la actividad logró cumplir con sus objetivos, porque se obtuvo respuestas de los alumnos en forma grupal, las cuales las presentaron en hojas, en base a lo que habían hecho usando el software Geogebra. Las respuestas en su mayoría fueron las esperadas. Cabe resaltar que se promovió que los alumnos lleguen solos a las respuestas que al final escribieron. Se puede

decir además que si bien no se puede afirmar categóricamente que los alumnos llegaron a comprender la relación de existencia de un triángulo, al menos se cumplió el objetivo de promover esta comprensión mediante un nuevo recurso, en este caso, el software Geogebra. Por último, es importante señalar que lo idóneo hubiese sido facilitar una computadora para cada alumno y así tener respuestas más precisas de cada uno en las actividades planteadas. Quedaría como propuesta volver a hacer la actividad pero en la que cada alumno utilice una computadora y por supuesto el software Geogebra.

Referencias

Salazar, J. V. (2011). *Registros de representación semiótica y la comprensión de conceptos geométricos (documento del curso: Teorías de la enseñanza de las matemáticas - PUCP)*. Recuperado el 20 de agosto de 2011, de: http://www.pucp.edu.pe/content/index.php

Santillana (2011). *Matemática 2 (Guía metodológica)*. Editorial Santillana S.A, Lima.

❖❖❖

La aplicación del modelo TPACK en la educación continua de los profesores de matemáticas de la Red Estatal de Rio de Janeiro (versión del libro de resúmenes)

Agnaldo da Conceição Esquincalha
Fundação CECIERJ – Brasil
aesquincalha@cecierj.edu.br

Carlos Eduardo Bielschowsky
Fundação CECIERJ – Brasil

Gisela Maria da Fonseca Pinto
Fundação CECIERJ – Brasil

Elizabeth Ramalho Soares Bastos
Fundação CECIERJ – Brasil

Resumen

En este trabajo se presentan los primeros resultados de la implementación de un curso de formación para profesores de matemáticas en la modalidad a distancia con énfasis en la inserción de recursos tecnológicos en clase. Este es un programa de acciones desarrolladas por una asociación entre la Red de Educación del Estado de Río de Janeiro y la Fundación Centro de Ciencias y Educación Superior a Distancia del Estado de Río de Janeiro que presta servicios a aproximadamente 1 500 profesores de Matemáticas de 2° y 3er año de secundaria. El enfoque que propone la inserción de recursos tecnológicos en clase de estos maestros fue inspirado por Mishra y Koehler (2006), a traves de la interconexión entre los conocimientos del contenido, la enseñanza y la tecnología en actividades de enseñanza de las matemáticas. El marco estructural que estos autores abordan es conocido como TPACK, sigla para Technology Pedagogical Content Knowledge. Justificamos la importancia de la inserción de los recursos tecnológicos, siempre en el camino de la exploración empírica, para permitir la formación del conocimiento matemático cuando la manipulación física ya no es posible dada la abstracción de los objetos estudiados. La organización del

curso se basa en un Entorno Virtual de Aprendizaje, EVA, el MOODLE, donde los profesores participantes tienen acceso a los materiales didácticos especialmente elaborados para ellos. Además de la lectura de estos materiales, los profesores participantes disponen de guias, que son actividades propuestas para el uso en clase, muchas veces basadas en el uso del software GeoGebra. A partir del material estudiado y de las guias propuestas, los profesores participantes del curso preparan su plan de trabajo y se aplica en clase, relatando en el EVA como fue la aplicación. De los resultados de esta aplicación, el profesor evalúa de nuevo el documento para posibles aplicaciones posteriores. Esta metodología se basa en las actividades de diseño y rediseño (Angotti y Mion, 2005), lo que permite al profesor reflexionar sobre las actividades en clase y sus resultados desde el marco teórico presentado. Además, el estímulo al desarrollo de los recursos de la propia enseñanza promueve el desglose de la utilización exclusiva de la pizarra o los libros de texto como facilitadores del aprendizaje. En em EVA, tenemos un tutor por cada 25 profesores, que tiene la responsabilidad de mediar las discusiones en los foros, leer y comentar los planes de trabajo presentados por los profesores, así como orientar sus aplicaciones.

Palabras clave: educación continúa de los profesores, modelo TPACK, educación a distancia.

Referencias

Mion, R., Angotti, J. (2005). Em busca de um perfil epistemológico para a prática educacional em Educação em Ciências. *Ciência & Educação*, v. 11, n.2, 165-180.

Mishra, P., Koehler, M. (2006). *Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge*. Teachers College Record, v. 108, n.6, 1017-1054.

❖❖❖

Uso de las matemáticas en el contexto de las ciencias humanas y las ciencias de la comunicación

Maritza Luna Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
luna.m@pucp.edu.pe

Resumen

Esta socialización pretende mostrar una experiencia positiva del curso de Matemáticas, el cual se viene dictando desde el semestre 2007-2, en la unidad académica de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica de Perú. Dicho curso ha sido diseñado pensando en aquellos alumnos que siguen especialidades en las que usualmente no se hace un uso instrumental intensivo de las Matemáticas. En este contexto, presentaré este artículo para compartir con los docentes de nivel secundario y superior dos casos muy interesantes vistos durante el año 2011 y que corresponden a las especialidades de Historia y Periodismo. Los temas que se abordaron fueron Porcentajes, Variación porcentual y Estadística. Los objetivos que se lograron con estos trabajos fueron buscar situaciones o casos de la vida real donde se aprecie el uso adecuado o inadecuado de las matemáticas; describir y analizar las herramientas matemáticas que se aplican en los casos elegidos; desarrollar capacidades que les permitan resolver y proponer problemas que no requieran matemáticas avanzadas; desarrollar actitudes como la visión crítica, el cuestionamiento a afirmaciones sin fundamento, la búsqueda de la verdad y la apertura a nuevas ideas; ampliar su visión matemática y su vinculación con las Ciencias Humanas y las Ciencias de la Comunicación.

Palabras clave: Matemáticas, Porcentajes, Variación porcentual, Estadística

Introducción

Se presentan dos situaciones, la primera fue realizada por un estudiante de la especialidad de Historia donde muestra el uso de porcentajes para la repartición del oro y la plata en la época de la conquista. La segunda situación desarrollada por un grupo de alumnos de la especialidad de Periodismo donde relizan un análisis de un editorial donde hace uso de la variación porcentual.

Situación 1: Uso de las matemáticas en el contexto de las Ciencias Humanas

Dentro de la Historia peruana, encontramos episodios que son narrados con mucho asombro por parte de las personas. Hechos como por ejemplo, el rescate que ofreció Atahualpa por su libertad a Francisco Pizarro. Sin embargo, a pesar de que este hecho es conocido por cualquier peruano, hay un hecho que permanece en el claroscuro y a veces en la total oscuridad del conocimiento generalizado: el reparto que hicieran los españoles de tan precioso botín.

El Inca no llegó a llenar los cuartos de metales preciosos (uno de oro y dos de plata) en los 40 días que se habían establecido como plazo. Ni siquiera aún con lo que trajo Hernando Pizarro a la vuelta de su expedición al templo de Pachacamac (que fue una cantidad considerable) se llegó a cumplir el ofrecimiento. Pizarro, a pesar de no haberse cumplido el trato, lo dio por cumplido. Sin embargo, no libertó al prisionero Inca. Como señala del Busto: "El raciocinio fue: no cumplió el Inca, tampoco debería de cumplir el Gobernador; éste daba por saldado el compromiso, pero con la condición de seguir reteniendo al prisionero. Lo que se logró, en verdad, fue que no se le condenara a muerte por deudor moroso."

Por considerar inmejorable la descripción que hace José Antonio del Busto Duthurburu del proceso de fundición y reparto del cuantioso rescate real, paso a transcribir su texto:

"Capeando todas estas opiniones y sin recurrir a la pena de muerte para conseguir el reparto del botín, fue que Pizarro

logró que se hiciera la fundición del oro el 13 de mayo de 1533. Ya habían regresando Hernando Pizarro de Pachacamac y los tres soldados voluntarios del Cusco, por lo que las cargas de oro y plata que trajeron también se añadieron al rescate, sin que aún por esto se llegara a saldar. Finalmente el 18 de junio de 1533 se verificó el histórico reparto, siendo tanto el oro y la plata repartidos que, sólo para el quinto real, se señaló cien mil pesos de buen oro y cinco mil marcos de plata. La lista del reparto de Cajamarca empezó contemplando a la Iglesia naciente del Perú, con sede episcopal en Tumbes, a la que se dio 2,200 pesos de oro y 90 marcos de plata. En segundo lugar se leyó el nombre del Gobernador, a quien se señalaron 57,220 pesos de oro y 2,350 marcos de plata. A Hernando Pizarro le tocaron 31,080 pesos 1,267 marcos; a Hernando de Soto 17,740 pesos y 724 marcos; al clérigo Juan de Sosa, vicario del ejército, 7,700 pesos y 310.6 marcos; a Juan Pizarro 11,100 pesos y 407.2 marcos; a Pedro de Candia 9,909 pesos y 407.2 marcos; a Gonzalo Pizarro 9,909 pesos y 384.5 marcos; y a Belalcázar 9,909 pesos y 407.2 marcos. Fray Vicente de Valverde, por su voto de pobreza, se negó a recibir nada.

Luego de éstos que eran los principales, vino la paga de los jinetes. Sumó 610,131 pesos de oro y 25,798.6 marcos de plata. Siguió la de los infantes, por un monto de 360,994 pesos de oro y 15,061.7 marcos de plata. Promediando, la mayoría de los encabalgados alcanzó 8,880 pesos y 362 marcos; los infantes 4,440 pesos y 181 marcos. Algunos más y otros menos, pero todos rondaron esas sumas. No se contentó el Gobernador con premiar sólo a los capturadores del Inca, sino que acordándose de los vecinos y dolientes que quedaron en la ciudad de San Miguel, separó 15,000 pesos de oro para ellos. Por último, en un gesto generoso para con los que llegaron tarde, separó otros 20,000 pesos para los hombres de Almagro "para ayudar de pagar sus deudas y fletes, y suplir algunas necesidades que traían".

A continuación se precisa el uso de las matemáticas
El reparto del oro puede expresarse en porcentajes y diagramarse como se muestra en la Tabla1.

Reparto de oro		
Beneficiario	Pesos	Porcentaje
Quinto Real	100000	7,917769216
Iglesia del Perú	2220	0,175774477
Francisco Pizarro	57220	4,530547545
Hernando Pizarro	31080	2,460842672
Hernando de Soto	17740	1,404612259
Clérigo Juan Sosa	7770	0,615210668
Juan Pizarro	11100	0,878872383
Pedro de Candia	9909	0,784571752
Gonzalo Pizarro	9909	0,784571752
Sebastián de Belalcázar	9909	0,784571752
Caballería	610131	48,3087645
Infantería	360994	28,5826718
Vecinos de San Miguel de Piura	15000	1,187665382
Almagro y soldados	20000	1,583553843
Total	1262982	100

Tabla 1

De modo similar el reparto de la plata puede expresarse en porcentajes y diagramarse como se muestra en la Tabla2.

Reparto de plata		
Beneficiario	Marcos	Porcentaje
Quinto Real	5000	9,57707631
Iglesia del Perú	90	0,172387374

Francisco Pizarro	2350	4,501225866
Hernando Pizarro	1267	2,426831137
Hernando de Soto	724	1,38676065
Clérigo Juan Sosa	310,6	0,59492798
Juan Pizarro	407,2	0,779957095
Pedro de Candia	407,2	0,779957095
Gonzalo Pizarro	384,5	0,736477168
Sebastián de Belalcázar	407,2	0,779957095
Caballería	25798,6	49,41503218
Infantería	15061,7	28,84941005
Vecinos de San Miguel de Piura	0	0
Almagro y soldados	0	0
Total	52208	100

Tabla 2

Situación 2: Error en la portada, contenido y página web de un periódico español.

Muchas veces leemos los diarios y no nos damos cuenta de que estos pueden contener información errónea en lo referente a las matemáticas y las cifras empleadas. Si revisáramos cada periódico en búsqueda de este tipo de errores, nos sorprenderíamos de lo que encontramos. Esto puede ser fácilmente ejemplificado con la siguiente situación de uso inadecuado de las matemáticas dentro del periodismo escrito.

Este caso se dio en el periódico español La Razón y está relacionado con una aplicación incorrecta de la operación de variación porcentual. En la portada de la edición del 22 de enero del 2010 de La Razón visualizábamos, como una de las noticias más importantes, el hecho de que la venta de la píldora del día siguiente (o día después) había crecido en un 300%. Sin embargo, si nos fijábamos en el contenido y la

página web, que obviamente han sido retirados de la página oficial del periódico y ya no están disponibles allí, encontrábamos una incoherencia entre los datos y los resultados presentados. No obstante, una persona copió las siguientes imágenes donde se registra el error antes de que estas fuesen eliminadas y las publicó.


SANIDAD
FOTO
DOCUMENTO
La venta de la píldora del día después crece un 300 por ciento
22 Enero 10 - Sergio Alonso
El cambio de estatus del medicamento si ha disparado la demanda, en contra de las previsiones del Gobierno.


LA RAZÓN
La venta de la píldora del día después crece un 300 por ciento
Conjuro contra el castellano en Galicia
BOTE 14,5 MILLONES

La conclusión, pues, es clara: en apenas un año, y **a pesar de que el Gobierno aseguró que no iba a aumentar la demanda con la modificación,** las ventas del fármaco se han multiplicado casi por tres –un 266 por ciento– al **pasar de 16.997 unidades vendidas a 45.317 en el último trimestre de 2009.** La gran diferencia entre ambas cifras con respecto a la regulación de la píldora es el cambio de estatus decidido por el Ejecutivo, con la aquiescencia del Ministerio de Sanidad y Política Social.

De acuerdo al contenido de la página web (que fue copiado con los mismos errores por otra web), en el período entre octubre y noviembre del 2008 se vendieron 16,997 unidades de la píldora del día siguiente, mientras que entre los mismos meses en el 2009 se dio una venta de 45,317 unidades. Obviamente hay un incremento entre un período y otro, pero la pregunta es si ese aumento equivale a un 266%, que han aproximado a 300%, o una cifra diferente a esa.

Para averiguarlo, debemos hacer uso del tema de porcentajes: ¿Qué es el porcentaje?

Dada una cantidad C, se llama tanto por ciento de C a una o varias de las cien partes iguales en que se puede dividir C, es

decir, uno o varios centésimos de C. El símbolo del tanto por ciento es %.

Así, el r% de C designa el número dado por r(C/100) que también puede interpretarse como (r/100)C, es decir, r% de C significa que de las cien partes iguales en las que se divide C se toman r partes.

¿Qué es la variación porcentual?

Dadas dos cantidades v_i y v_f, si se pide determinar la variación porcentual (V), es decir, cuánto varió v_f respecto d e v_i, se debe realizar la siguiente operación:

$$\mathrm{V} = \frac{v_f - v_i}{v_i} \times 100\%$$

Teniendo en cuenta la información anterior, realizaremos la operación para demostrar el error existente de la siguiente manera:

Cantidad inicial (v_i): 16,997 Cantidad nueva (v_f): 45,317

Reemplazando (quitaremos las comas de los millares por practicidad):

$$\mathrm{V} = \frac{45317 - 16997}{16997} \times 100\% = 1{,}666176384 \times 100\%$$

$$\mathrm{V} = 166{,}6176384 \text{ ó } 167 \text{ aproximadamente.}$$

Considerando la operación anterior, podríamos decir que se trata de un aumento equivalente al 167%. Si queremos ser extremistas con nuestra aproximación, podría ser casi un 200% de aumento. Sin embargo, está muy lejos de ser el aumento de 300% que indica la portada, el contenido y la página web del periódico. Esto nos indica que este grave error no sería cometido si los periodistas de este periódico hubiesen realizado la operación correctamente y verificado sus resultados.

Referencias

De Jerez, F. & Sancho, P. (1917). *Las relaciones de la Conquista del Perú.* Imprenta y Librería Sanmarti y Ca. Lima.

Del Busto D. J. A. (1978). *Historia General del Perú: Descubrimiento y Conquista*. Perú: Librería Studium S.A.

Gaita, C. Advincula, E. Barrantes E. Henostroza, J. Jabo, F. & Luna, M. (2009). *Matemáticas para no matemáticos.* Colección intertextos N° 4. Perú. http://facultad.pucp.edu.pe/generales-letras/publicaciones-tipo/coleccion-intertextos/?ver=publicacion&id=854

La Razón. La venta de la píldora del día después crece un 300 por ciento. España. Recuperado el 22 de enero de 2010. http://www.larazon.es/hemeroteca/4552-la-venta-de-la-pildora-del-dia-despues-crece-un-300-por-ciento

❖❖❖

Uso de Wiris en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales

Daysi Julissa García Cuéllar
Colegio Sagrado Corazón – Sophianum-Perú
daysigarcu@gmail.com

Daniel Giovanni Proleón Patricio
Colegio Sagrado Corazón – Sophianum-Perú
dproleon@gmail.com

Resumen

En la actualidad existen diversas herramientas que ayudan a fortalezer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, una de ellas es la calculadora en la red *wiris* que permite realizar diversas actividades en las distintas áreas de la matemática como el álgebra, geometría, cálculo, algebra lineal y analisis combinatorio. *Wiris* es una calculadora en la red, es decir, se utiliza de manera online lo cual permite su fácil acceso por parte de las estudiantes. La experiencia con *Wiris* fue realizada con las alumnas del segundo grado de educación secundaria del colegio Sagrado Corazón – Sophianum. Los objetivos planteados para esta experiencia fueron motivar a las alumnas en el aprendizaje de los sitemas de ecuaciones lineales, resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos o tres variables, representar gráficamente y reconocer el tipo de sitema de ecuación (compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible), e introducir recursos TIC en el aula de matemática.

Los resultados obtenidos de la experiencia fueron que las alumnas se mostraron con mayor disposición con el tema, sabian diferenciar el tipo de sistema ecuación lineal según la gráfica de su solución, identificaban gráficamente la solución de un sistema de ecuación compatible determinado, verificaban sus resultados obtenidos con el uso de *Wiris* y mostraban mayor seguridad al comunicar sus resultados.

Palabras clave: Aprendizaje de la matemática, wiris, sistemas de ecuaciones lineales, recursos TIC, enseñanza nivel secundaria.

Introducción

El desarrollo de las Tecnologías de la información y comunicación (TIC), ha permitido el uso de diversas herramientas para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Es por esta razón que presentamos una metodología de introducir las TICs en el aula de matemática con *Wiris*.

Wiris es una herramienta on-line de cálculo matemático, de libre acceso y de multiples funciones. Esta herramienta permite realizar la mayoría de los contenidos matemáticos de la educación secundaria y de los primeros ciclos de la educación universitaria como: el cálculo, geometría, análisis, combinatoria, algebra lineal, estadística, entre otros.



Figura N° 1

Objetivos

- Intrumentalización e instrumentación de WIRIS en sistemas de ecuaciones lineales
- Reconocer el tipo de sitema de ecuación (compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible)
- Resolver con destreza sistemas de ecuaciones lineales y aplicarlos a la resolución de problemas.

Metodología

Las sesiones se realizaron en la sala de informática, la cual tienen acceso a internet, donde se plantearon las siguientes actividades:

<u>Actividad N° 1:</u> ¿Cómo se utiliza wiris para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales?

Se dio énfasis en el aprendizaje de la herramienta wiris para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

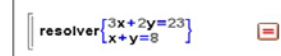
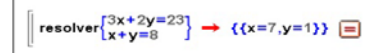
Actividad	*Solución*
Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ x+y=8 \end{cases}$	- En Operaciones elige resolver sistema y escribe el número dos que indica que es un sistema con dos incógnitas.  - Escribe las dos ecuaciones  - Pulsa = Calcular 

Figura N° 2

<u>Actividad N° 2:</u> ¿Qué tipos de sistemas de ecuaciones existen?
Centrada en el reconocimiento del tipo de sistemas de ecuaciones lineales

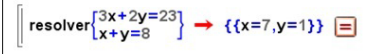
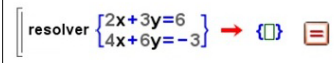
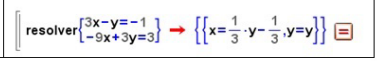
Actividad	*Solución*
Resolver y determinar el tipo de sistema de ecuaciones, según su solución: $\begin{cases} 3x+2y=23 \\ x+y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+3y=6 \\ 4x+6y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ -9x+3y=3 \end{cases}$	***Sistema compatible determinado***  ***Sistema incompatible***  ***Sistema compatible indeterminado*** 

Figura N° 3

<u>Actividad N° 3:</u> Representación gráfica de un sistema de ecuaciones lineales.

Se dio énfasis a graficar los sistemas de ecuaciones lineales asi como a identificar su conjunto solución.

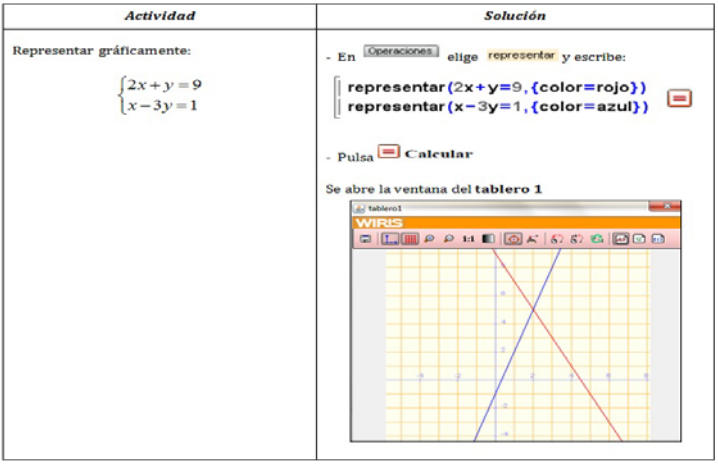


Figura N° 4

<u>Actividad N° 4:</u> Resolución de problemas
Centrada en el planteo y en la resolución del sistemas de ecuaciones lineales por medio del Wiris.

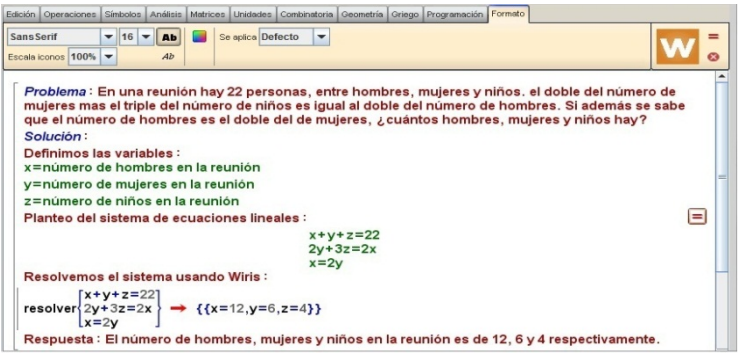

Edición Operaciones Símbolos Análisis Matrices Unidades Combinatoria Geometría Griego Programación Formato
Problema : En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. el doble del número de mujeres mas el triple del número de niños es igual al doble del número de hombres. Si además se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?
Solución :
Definimos las variables :
x=número de hombres en la reunión
y=número de mujeres en la reunión
z=número de niños en la reunión
Planteo del sistema de ecuaciones lineales :
x+y+z=22
2y+3z=2x
x=2y
Resolvemos el sistema usando Wiris :
resolver {x+y+z=22, 2y+3z=2x, x=2y} → {{x=12,y=6,z=4}}
Respuesta : El número de hombres, mujeres y niños en la reunión es de 12, 6 y 4 respectivamente.

Figura N° 5

Conclusiones

Los resultados que hemos identidicado en las alumnas fueron:

- Se pudo observar que con el uso del Wiris, aumentó el interés de las alumnas en los sistemas de ecuaciones lineales porque podian verificar sus resultados con facilidad y porque el entorno del Wiris es un entorno amigable para su aplicación.
- Con la graficación de las rectas en Wiris pudieron relacionar la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas con su representación gráfica.
- La representación gráfica de un sistema de ecuaciones en Wiris afianzó el concepto de la clasificación de dichos sistemas, por lo que sabian diferenciar el tipo de sistema ecuación lineal según la gráfica de su solución.
- Las alumnas mostraban mayor seguridad al comunicar sus resultados.

Referencias

Arias, J. (2011). Informatica y matemática. Recuperado el 26 de abril de 2011, de: http://www.infoymate.es/

Lima, E., Pinto, P., Wagner, E & Morgado, A. (2006). A Matemática do ensino médio. Rio de Janeiro Ed. SBEM.

Jahn, A. & Gomes, N. (2010). Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores. Rio de Janeiro. Ed. SBEM.

Lima, E (2001). Geometria analítica e álgebra linear. Rio de Janeiro. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e aplicada.

Navarro, M.(2004). Recursos TIC en Matemáticas: Wiris. Recuperado el 28 de setiembre de 2011, de: http://www.profes.net/rep_documentos/Revista_Digital/Not_Recursos%20TIC%20en%20Matem%C3%A1ticas_articulo.pdf.

❖❖❖

Herramientas matemáticas aplicadas a la publicidad y derecho

Nancy Edith Saravia Molina
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú
nesaramo@gmail.com

Resumen

Desde el semestre 2007- 2 se comenzó a dictar el curso de Matemáticas en la facultad de Estudios Generales Letras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, dicho curso está dirigido a los alumnos de las diferentes especialidades del área de letras. Pensamos que una de las razones que inclinan a los estudiantes por estas especialidades podría ser para evadir, de alguna manera, los cursos relacionados con la Matemática; por ese motivo, en el curso de Matemáticas (MAT 128) se exige a los estudiantes que realicen un trabajo por especialidad, en el que se presenten aplicaciones de las matemáticas en la carrera que eligieron. En este contexto, presentamos este artículo para compartir con los docentes de nivel secundario y superior esta experiencia enriquecedora de trabajo en clase. Los temas matemáticos que aborda esta experiencia son: *Porcentajes, Sistema de Números y Estadística*. Los objetivos de estos trabajos fueron: Identificar situaciones de la vida real en las carreras de Publicidad y Derecho donde se aprecie el uso adecuado o inadecuado de las matemáticas. Explicar la relación existente entre la situación elegida, la especialidad del grupo y las matemáticas, utilizando la información teórica que sea necesaria. Describir y analizar las herramientas matemáticas que se aplican en los casos elegidos. Mostrar la necesidad e importancia de las matemáticas en todas las especialidades para resolver problemas de la vida cotidiana relacionadas a Publicidad y Derecho. En la carrera de Publicidad se ha considerado dos situaciones, la primera es el anuncio de *Cepsa – 2010*, este anuncio sugiere dos cambios al mismo tiempo, un cambio de representación gráfica (y de nombre) de los números y un cambio de base del sistema de numeración, este caso se puede apreciar como un buen uso de

las matemáticas. La segunda situación, es un caso muy usual en la publicidad de un producto, se trata de los descuentos sobre descuentos (aquí se aprecia claramente el uso de porcentajes), esta situación muchas veces resulta engañosa para el comprador. En la carrera de Derecho, se analiza el sonado caso de la peruana que estafó al sistema de salud estadounidense por la suma de doscientos cinco millones de dólares, en este caso se utiliza estadística y es claramente un mal uso de las matemáticas.

Palabras clave: Porcentaje, Sistema numérico, Estadística.

Introducción

Muchos de los estudiantes de las especialidades como derecho y publicidad han elegido su carrera porque quieren evitar un nuevo encuentro con la matemática. Y a pesar de que la mayoría de los planes de estudios de las carreras mencionadas contemplan algún curso de matemáticas, la actitud negativa hacia esta disciplina se mantiene.

Ante esta realidad, en el trabajo por especialidad se propone que partan de situaciones cotidianas y contextos próximos a los de sus carreras, para que asi cambie la actitud de los estudiantes hacia la matemática, ello permitirá cubrir el vacío en la formación matemática básica.

Herramientas matemáticas aplicadas a la publicidad

¿Qué es publicidad?

Para la Real Academia de la Lengua, publicidad significa, divulgación de noticias o anuncios de carácter comercial para atraer a posibles compradores, espectadores, usuarios, etc.

El fin de la publicidad es el poder de convencer al consumidor a través de imágenes, ideas o frases con la ayuda de la creatividad difundida en los medios de comunicación, ya sea por televisión, radio o paneles en las vías públicas.

En la actualidad la publicidad ya no se centra solo en el consumismo, se busca que el consumidor tenga una relación con la marca. **La publicidad es la fuerza creativa del mundo.**

Sistema de Numeración Decimal

Como es conocido, nuestro sistema de numeración es posicional y de base 10, es decir, la cifra de cada posición marca la cantidad de veces que contamos, de izquierda a derecha, las unidades (1), las decenas (10), las centenas (102=100), los millares (103=1000), etc.

Así, en nuestro sistema de numeración, 423 se expresa como $4 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 = 400 + 20 + 3$. O el número $5423 = 5 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 = 5000 + 400 + 20 + 3$.
Los sistemas de numeración posicionales necesitan de la existencia del cero para indicar que en la posición donde aparece no se añade esa potencia de la base.

Por ejemplo, continuando con nuestro sistema de numeración, la expresión $703 = 7 \times 100 + 0 \times 10 + 3 \times 1 = 700 + 0 + 3$. Las cifras de nuestro sistema de numeración son diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Sistema de Binario

El sistema binario es el utilizado por ejemplo en los ordenadores, los Compact Discs, etc. Este sistema de numeración tiene únicamente dos cifras 0 y 1, por lo que es una numeración muy sencilla.

Matemáticamente, existe la posibilidad de convertir un número de un sistema numérico a otro.

Descomposición en factores de un número base 2 (binario) y su conversión a un número equivalente en el sistema numérico decimal.

Veamos ahora cómo llevamos el número binario 10111101_2 a su equivalente en el sistema numérico decimal. Para descomponerlo en factores será necesario utilizar el 2,

correspondiente a su base numérica y elevarlo a la potencia que le corresponde a cada dígito, de acuerdo con el lugar que ocupa dentro de la serie numérica. Como exponentes utilizaremos el "0", "1", "2", "3", y así sucesivamente, hasta llegar al "7", completando así la cantidad total de exponentes que tenemos que utilizar con ese número binario. La descomposición en factores la comenzamos a hacer de izquierda a derecha empezando por el mayor exponente.

Ejemplo 1:

$$\mathbf{10111101}_2 = (1.2^7) + (0.2^6) + (1.2^5) + (1.2^4) + (1.2^3) + (1.2^2) + (0.2^1) + (1.2^0)$$

$$= (128) + (0) + (32) + (16) + (8) + (4) + (0) + (1)$$

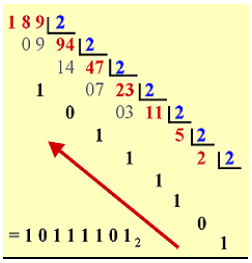
$$= \mathbf{189}$$

Conversión de un número entero del sistema numérico decimal al sistema de binario

Seguidamente realizaremos la operación inversa, es decir, convertir un número perteneciente al sistema numérico decimal (base 10) a un número binario (base 2). Utilizamos primero el mismo número 189 como dividendo y el 2, correspondiente a la base numérica binaria del número que queremos hallar, como divisor.

Una vez terminada la operación, escribimos los números correspondientes a los residuos de cada división en orden inverso, o sea, haciéndolo de abajo hacia arriba. De esa forma obtendremos el número binario.

Ejemplo 2:





Situación 1: Anuncio Cepsa 2010

En este anuncio, como en los otros de la misma serie, se nos muestra un pueblo de España, la provincia de Salamanca, en el cual, atendiendo al guión de la historia que se cuenta en el anuncio, han decidido sustituir cada uno de los nombres de los números por el nombre del jugador de la selección española que llevaba ese número en el Mundial de Sudáfrica.

Este anuncio es bastante imaginativo, ya que el cambio que sugieren en el pueblo, lleva consigo dos cambios al mismo tiempo:

- Un cambio de representación gráfica (y de nombre) de los números, lo cual es el cambio evidente que se ve en los anuncios (el 1 se llama y se escribe "Casillas", el 2 se llama y se escribe "Albiol", y así sucesivamente).

- Un cambio de base del sistema de numeración, cambio más drástico de lo que parece a priori. Como el número de jugadores de la selección es 23 y no 10, entonces al cambiar el nombre y grafía de los números, también estamos cambiando la base de numeración. De base 10 a base 23.
  El nuevo sistema de numeración, tiene ahora 23 cifras distintas (los nombres de los jugadores de la selección española de futbol que ganaron el Mundial de Sudáfrica 2010), luego implica que es un sistema de numeración de base 23.

Por lo tanto, el número que nosotros representamos como 137, es

$$137 = 5 \times 23 + 22 = \text{Puyol Navas}$$

Y el número 1458 se representará en este sistema de numeración como

$$1458 = 2\times(23)2 + 17\times23 + 9 = \text{Albiol Arbeloa-Fernando Torres}$$

O al revés, el número que ellos representarán como "Casillas David-Villa Llorente", en nuestro sistema de numeración es

$$\text{Casillas David-Villa Llorente} = 1\times(23)2+7\times23+19 = 529+161+19=709$$

Como hemos escrito antes, necesitamos el cero (0) en los sistemas de numeración posicionales. Por seguir con la idea de los anuncios, podíamos considerar que el cero, por su importancia, es el entrenador Vicente del Bosque (del Bosque), aunque esto ya no aparece en los anuncios. Entonces el número "Ramos Casillas del Bosque Llorente" sería

Ramos Casillas del Bosque Javi-Martínez

$= 15 \times (23)3 + 1 \times (23)2 + 0 \times 23 + 20$

$= 15 \times(12\ 167) + 1 \times (529) + 0 + 20$

$= 182\ 505 + 529 + 20$

$= 183\ 054$

Situación 2:

Un caso muy usual en los centros comerciales ya sea de ropa, abarrotes, electrodomésticos, etc. Una utilización muy estratégica en la Publicidad de un producto son los descuentos sobre descuentos. Algunos se preguntarán por qué y la respuesta es muy simple. Cuando se coloca un aviso publicitario con un descuento, se coloca el descuento principal de un tamaño grande y un descuesto adicional de un tamaño más pequeño seguido de un símbolo "más" (+).



Por ejemplo: Ropa para mujeres, 30% de descuesto+20% adicional. La mayoría de personas pensarían que el descuento de la ropa es 30%+20%=50% pero es engañosa pues el 20% adicional es sobre el precio descontado del 30% y su resultado es menor que la forma cómo piensan la gente.
Chompa = S/. 150

Caso pensado:	**Caso real**:
30% + 20% = 50% 50% × S/.150 = S/. 75 S/.150 - S/.75 = S/.75	30% × S/.150 = S/.45 S/.150 - S/.45 = S/.105

20% × S/. 105 = S/. 21
S/. 105 - S/. 21 = S/.84

Caso pensado < Caso real

Herramientas Matemáticas en Derecho

"En el ámbito internacional analizaremos el sonado caso de la peruana que estafó al sistema de salud estadounidense por la suma de doscientos cinco millones de dólares. La peruana, dueña de una cadena de clínicas de servicios de salud mental

American Therapeutic Corp. (ATC); logró, a lo largo de ochos años, sustraer la cantidad antes mencionada. Su accionar se basa en la invención de pacientes, para luego recibir fondos de programas de salud, para lo que presentaba miles de facturas falsas, registrando servicios que nunca se brindaron. Las entidades que fueron directamente afectadas fueron los programas de salud federal de los estados unidos: Medicare y Medicaid; por lo que fueron denunciados por el delito de lavado de dinero".

Para poder explicar el caso, nos planteamos un supuesto del número promedio de personas que requerían los servicios en cada sede de la red médica. Así asumiremos que nuestra muestra está compuesta por 20 personas, pero para que la cantidad de dinero que pedirían al estado no fuera escandalosa se inventaban pacientes, y así la cantidad de pacientes se aumenta a 30 personas.

Ahora bien a partir de esta situación elaboraremos dos gráficos, con el fin de poder apreciar la realidad.

- **Variable:** Cantidad de dinero invertida por cada paciente.
- **Tipo de variables:** Cuantitativa continúa.

Situación 3: Tabla de distribución de frecuencias (DATOS REALES)

Intervalo	Marca de clase	f_i	h_i	F_i	H_i	Frecuencia porcentual
[55-94[	74.5	4	0.2	4	0.2	20%
[94-133[	113.5	4	0.2	8	0.4	20%
[133-172[	152.5	5	0.25	13	0.65	25%
[172-211[	191.5	5	0.25	18	0.9	25%
[211-250]	230.5	2	0.1	20	1	10%
		20	1			

Frecuencia absoluta: f_i
Frecuencia relativa:h_i
Frecuencia acumulada absoluta: F_i
Frecuencia acumulada relativa: H_i

Hallando las medidas de tendencia central:

I. **Mediana:** No se puede determinar el valor exacto, pero podemos decir en que intervalo se encuentra.
   Como n=20 consideremos las posiciones 10 y 11, así la mediana es el promedio de los datos que ocupan estas posiciones y se encuentra en [133-172[.
II. **Moda:** No podemos saber si hay ya que los datos están agrupados.

III. **Promedio:**

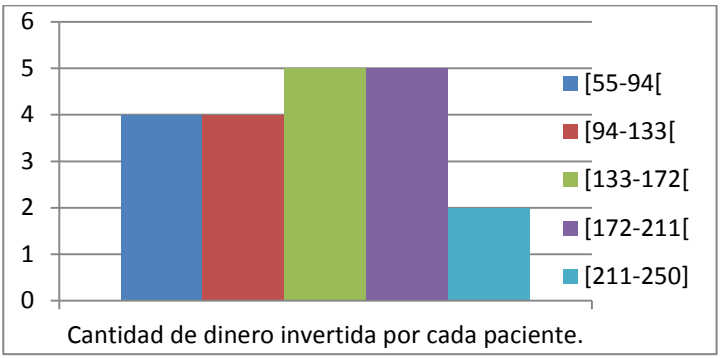
$$x = \frac{(74.5\times4)+(113.5\times4)+(152.5\times5)+(191.5\times5)+(230.5\times2)}{20}$$

$$x = \frac{2933}{20} = 146.65$$

Promedio Real

Situación 4: Tabla de distribución de frecuencias (DATOS ADULTERADOS)

Intervalo	Marca de clase	f_i	h_i	F_i	H_i	Frecuencia porcentual
[55-94[	74.5	6	0.2	6	0.2	20%
[94-133[	113.5	14	0.47	20	0.67	47%
[133-172[	152.5	4	0.13	24	0.80	13%
[172-211[	191.5	4	0.13	28	0.93	13%
[211-250]	230.5	2	0.07	30	1	7%
		30	1			



Hallando las medidas de tendencia central:

I. **Mediana:** No se puede determinar el valor exacto, pero podemos decir en que intervalo se encuentra.
Como n=30 consideremos las posiciones 15 y 16, así la mediana es el promedio de los datos que ocupan estas posiciones y se encuentra en [94-133[.

II. **Moda:** No podemos saber si hay ya que los datos están agrupados.

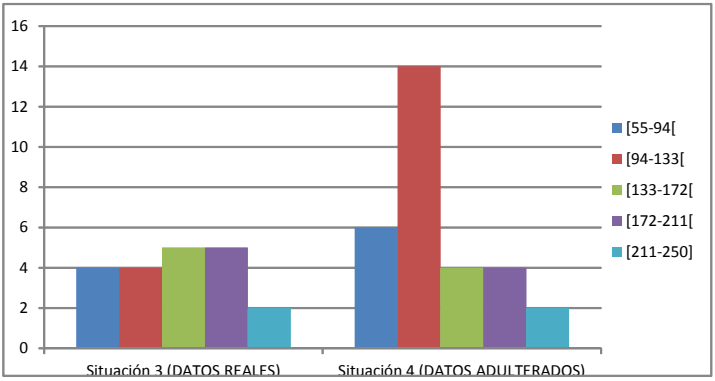
III. **Promedio:**

$$y = \frac{(74.5 \times 6) + (113.5 \times 14) + (152.5 \times 4) + (191.5 \times 4) + (230.5 \times 2)}{30}$$

$$y = \frac{3873}{30} = 129.10$$

Promedio Adulterado

Ahora veremos los datos de las situaciones 3 y 4 en un solo plano, de modo que podamos ver la diferencia entre ellos, que es un reflejo del aumento de pacientes.



Por último analizamos toda la información dándonos cuenta que el promedio correspondiente a las cantidades de la situación 4 (Datos Adulterados), que el estado invierte por cada persona es $ 129.1 (pero si dividimos entre 20 personas que es el número real, tenemos que el promedio es $ 193.65), mientras que el promedio correspondiente a las cantidades de la situación 3 (Datos Reales) es $ 146.65. Si hallamos la diferencia de las cantidades hallaremos el promedio de las ganancias, por persona, que tiene obtiene la empresa de la peruana y si la multiplicamos por la diferencia de personas hallaremos lo que estaría ganando por establecimiento.

1) z= $193.65-$146.65=$47

2) G= $47 × (30-10) = $940

Así podemos ver que la empresa peruana sustraía del estado un aproximado de $47 por persona y $940 por cada sucursal de la clínica.

Otra forma:

Monto total adulterado	= $3 873
Monto total real	= $2 933
Diferencia	$940

Referencias

Advíncula, E., Barrantes, E., Gaita, C., Henostroza, J., Jabo, F. y Luna, M. (2009). *Matemáticas para no matemàticos*. Estudios Generales Letras, PUCP.

El comercio. (2011). *Abugattas pidió cárcel para responsables de remodelación del Nacional*. Consulta el 12 de setiembre de 2011, de: http://elcomercio.pe/deportes/1264259/noticia-abugattas-pidio-carcel-responsables-remodelacion-nacional

El comercio. (2011). *Peruana culpable de gran estafa contra programa de salud en EE.UU.* Consulta el 8 de abril de 2011, de: http://elcomercio.pe/mundo/744726/noticia-peruana-culpable-gran-estafa-contra-programa-salud-eeuu

Ibañez, Raúl. Anuncia CEPSA 2010. Artículo redactado en Enero 2011, de: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=11725%3A2-enero-de-2011-la-roja-y-las-matematicas&catid=298%3Alas-matematicas-en-la-publicidad & directory =67

❖❖❖

Imagens de professores de matemática em charges e cartuns postados na internet

Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo – Brasil
lhp@upf.br

Maiara Zaparoli
Universidade de Passo Fundo – Brasil

Resumo

O presente trabalho surge como uma reflexão de como se representa o universo de relações vivenciadas pelos professores, e também os de matemática, através de charges e cartuns que estão a disposição em muitos sites da internet. A observação destas representações e como se apresentam, em muito contribui para uma análise, de forma geral, da forma como os professores de matemática e a disciplina que ensinam circulam de forma ampla, próprio do que se encontra na internet, criando um universo de concepções de senso-comum a formar uma identidade das ações e posturas entendidas como próprias de quem é professor de matemática. O material que aqui se encontra possui base na concepção de comunicação (Penteado, 1982), e o potencial da imagem e suas múltiplas formas de comunicar e formar opinião (Marshall e Meachem, 2010). Após este estudo ficou evidenciado a necessidade de cada vez mais se formar professores críticos em suas ações como educadores, ao mesmo tempo em que sejam capazes de refletir sobre o universo de concepções comumente atribuído como próprio de quem ensina. Ao se tentar buscar criar estratégias para esta perspectiva de formação, com certeza também aspectos do que se ensina em matemática e o como se ensina merecerá atenção por parte de todos aqueles preocupados com esta disciplina.

Palavras – chave: Imagem, professor, matemática, charges, cartuns

Introdução

O trabalho de pesquisa que se desenvolveu parte de um pressuposto básico que a imagem que formamos de nós em muito é influenciada pelas opiniões e conceitos desenvolvidos e pensados por outros. Desta forma nos constituímos como seres que gradativamente vamos formando uma representação mental daquilo que acreditamos ser nós mesmos.

Entendemos que este processo é similar quando se trata da profissão escolhida ou de comportamentos adotados em relação a uma atividade profissional desenvolvida, no caso, a de professor de matemática.

Nesta perspectiva buscamos identificar e analisar a imagem corrente do professor de matemática diante de charges e cartuns contemporâneos, que circulam na internet, uma vez que o uso desta ferramenta, a internet, é cada vez mais comum e por sua vez constituí um espaço onde é possível identificar tendências, atualidades e também aquilo que de forma geral ou o que poderíamos chamar, de senso comum, se identifica sobre um determinado assunto ou questão.

A construção do trabalho se deu pela pesquisa em sites diversos onde fosse possível identificar imagens, na forma de cartuns e charges, com a intenção de formar um banco de dados com tais imagens para uma posterior análise. A pergunta guia da atividade sempre foi: como o professor e também o professor de matemática e a própria matemática é vinculada em um meio eletrônico de massa como a internet? Com tal referência contatamos um grande número de representações de natureza humorística, o que já mostrava uma tendência do que viríamos a encontrar.

Em nosso trabalho usamos a conceituação de Melo (1994) onde charge é entendida como uma "crítica humorística de um fato ou acontecimento específico. Reprodução gráfica de uma notícia já conhecida do publica segundo a ótica do desenhista. Tanto pode se apresentar somente através de imagens quanto combinado de imagens e texto". (p. 168).

Ferreira (2009) amplia este conceito ao afirmar que ela retrata situações e apresenta contestações do que retrata, fazendo críticas exageradas, a partir do humor. A charge ainda ressalta os pontos mais marcantes do acontecimento de forma cômica.

Já os cartuns, como ressalta Melo (1994, p. 168), tratam de uma anedota gráfica e crítica mordaz, que representam personagens e z expressão criativa do cartunista, o qual penetra no domínio da fantasia. No mesmo sentido, expõe Pagliosa (2005, p. 116) que o cartum está voltado a críticas de costumes, focalizando uma realidade genérica e atemporal. Em síntese, a charge critica um personagem, fato ou acontecimento, inserido em determinado espaço e tempo.

Considerações chegadas

Ao investigar as imagens encontradas, inicialmente, percebemos um professor em meio a vários problemas, entre os quais: a sua relação com os pais dos alunos; a relação com os alunos; o salário; o fracasso escolar; o descaso do governo; a falta de estrutura e de material didático; a elevada carga horária de trabalho; a violência escolar; a falta de autovalorização e de domínio dos conteúdos.

Com base nas imagens observadas e nas leituras feitos podemos concluir que a imagem concebida do professor de matemática, em charges e cartuns contemporâneos encontrados na internet, é de um ser desvalorizado pelos pais, pelos alunos, pelo governo e por si mesmo; miserável no que concerne ao seu salário; culpado pelo fracasso escolar; desestimulado; incapaz diante das provas externas; covarde diante da violência antiético, quando atribuí notas em troca de segurança; coitado, devido à submissão frente às condições de trabalho e sua excessiva atividade cotidiana.

Um aspecto importante é perceber que ao criar uma representação como acima descrita, os cartuns e charges vinculados na internet também tecem críticas aos órgãos competentes, a fim de ajudar a divulgar e polemizar as situações apresentadas, para possíveis melhoras.

Em um primeiro momento de análise e reflexão sobre o material coletado fomos imbuídos de uma percepção do quanto é negativa a forma como o professor de matemática é exposto a opinião de massa que acessa a internet. Se a percepção e construção de nossos referencias do que somos e do que é nossa profissão passa pela construção das representações vindas de outros, é preocupante esta forma caricaturada e em muito miserável como se dá a concepção via internet.

Ao mesmo tempo em que nos preocupa, tais imagens são referencias a serem utilizados como espaço para análise, comparações, percepções, busca de ideias conflitantes e numa perspectiva para os professores que formam professores, a necessidade de discutir com estes o quanto tais imagens realmente representam a verdade vivenciada em suas realidades e como é possível mudá-las, se tais forem verdadeiras.

Ao compararmos a forma como o professor, o professor de matemática e a matemática são vinculados em diferentes sites da internet nos é possível tentar buscar uma reflexão de cunho mais profundo que extrapole a simples representação da imagem, mas que busca contextualizar, analisar por um ponto de vista histórico e cultural como tais concepções foram se formando e como, em diferentes momentos da vivência da docência alguns destes itens analisados foram se incorporando a discursos corretes e que se impõem como verdadeiros. Refletir sobre esta perspectiva de veracidade de tais opiniões por si só dará elementos para possíveis mudanças naquelas situações aos quais não se concordam serem verdadeiras ou que necessitam serem mudadas se desejamos a busca por um ensino de matemática com qualidade e que realmente consiga alavancar melhorias para a matemática e principalmente em seu ensino escolar.

Através deste trabalho demos um primeiro passo na intenção de expor como somos vistos por uma sociedade cada vez mais conectada á internet e que por sua vez aceita como definitivo e verdadeiro muito das informações vinculadas por ela. Ter

ciência destas perspectivas já é um alerta a ser considerado para possíveis mudanças.

Referências

Alcântara Machado, S. D. (2003). *Aprendizagem em matemática.* Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus.

Bencostta, M. L. (2007). *Culturas escolares, saberes e práticas educativas:* itinerários históricos. São Paulo: Cortez.

Burke, P. (2004). *Testemunha ocular:* História e Imagem. Bauru: Edusc.

D'Ambrosio, U. (1998). *Educação matemática:* da teoria à prática. (4th ed.). Campinas, Papirus.

Fraco, M. A. C., Alves, N. (2004). *A leitura de imagens na pesquisa social:* história, comunicação e educação. São Paulo: Cortez, 2004.

Ferreira, M. R. (2009). *Editorial animado na internet: visão crítica das notícias através de site charges.com.br.* Acesso em 28 de agosto de 2011. Disponível em: HTTP://www.faccrei.edu.br/dialogointeracao.

Joly, M.. (1996). *Introdução à análise da imagem*. Campinas: Papirus.

Marshall, L., Meachem, L. (2010). *Como usar imagens*. São Paulo: Edições Rosani.

Melo, J. M. (1994). *A opinião no jornalismo brasileiro*. Petrópolis: Vozes.

Parreira Cordeiro, J. F. (2002). *Falas do novo, figuras da tradição*. O novo e o tradicional na educação brasileira (anos 70 e 80). São Paulo: Editora UNESP.

Pagliosa, E. L. (2005). *Humor: um estudo cognitivo da charge*. Porto alegre: EDIPUCRS.

Penteado, J. R. (1982). *A técnica da comunicação humana.* São Paulo: Pioneira.

❖❖❖

Análisis de la idoneidad de un proceso de intrucción para la introducción del concepto de probabilidad en la enseñanza superior (versión del libro de resúmenes)

Augusta Osorio Gonzales
Pontificia Universidad Católica del Perú – Perú
arosorio@pucp.edu.pe

Resumen

La enseñanza de la probabilidad es uno de los temas más estudiados dentro de la didáctica de la estadística, pero al trabajar el tema en el nivel universitario el docente se encuentra con que la mayoría de los alumnos no ha tomado contacto con el tema en absoluto o en lo mejores casos conocen solo lo referente al cálculo de probabilidades sobre el planteamiento laplaciano. Eso complica mucho el panorama en un primer curso introductorio de Estadística, más cuando se tiene que llegar a trabajar con temas de inferencia. El proceso de instrucción a presentarse en la socialización, está diseñado para la introducción del concepto de la probabilidad a nivel universitario y parte de una propuesta que refuerza la necesidad del estudio de las situaciones aleatorias para la presentación del concepto de probabilidad. Por tanto el tema estadístico central que aborda el proceso de instrucción son las situaciones aleatorias su caracterización, clasificación y el análisis de sus componentes. Además, se toma en cuenta un tipo de concepción de probabilidad como referente, la concepción subjetiva. En el diseño del proceso de instrucción se ha tomado en cuenta el enfoque Ontosemiótico de la de la cognición e instrucción matemática (EOS), que dará las pautas para la idoneidad que debe presentar el proceso de instrucción. La ventaja de utilizar este proceso de instrucción es obtener una metodología de instrucción que permita al alumno el entendimiento cabal de la necesidad del uso de las probabilidades para el trabajo del análisis de los posibles resultados en situaciones de su realidad inmediata.

Palabras clave: Probabilidad, experimento aleatorio, idoneidad, enfoque ontosemiótico.

Referencias

Batanero, C. (2001). La aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas. En *Actas de las X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 119-130). Zaragoza: ICE. Recuperado el 7 de diciembre de 2011 desde http://www.ugr.es/~batanero/

Batanero, C. y Serrano, L. (1995). *Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*. Uno, 15-28. Recuperado el 7 de diciembre de 2011 desde http://www.ugr.es/~batanero/

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, Volumen XXVII, Nº 2, 221-252. Recuperado el 8 de diciembre de 2011 desde http://www.ugr.es/~jgodino/

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 8 de diciembre de 2011 desde http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Serradó, A. Cardeñoso,J. y Azcarate,P (2006). Los obstáculos en el aprendizaje del conocimiento probabilístico: su incidencia desde los libros de texto. TARBIYA, *Revista de Investigación e Innovación Educativa* del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación.

Universidad Autónoma de Madrid Nº38. Recuperado el 7 de diciembre del 2011 desde http://www.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/tarbiya/tarbiya/38/38-04.html

❖❖❖

Relación entre uso de ambientes virtuales de aprendizaje y el rendimiento académico en los primeros cursos de matemáticas para ingeniería (versión del libro de resúmenes)

Luis Fernando Díaz Basurco
Docente de la Universidad Católica Santa María Arequipa - Perú
ldiazbasurco@gmail.com

Resumen

La presente trabajo es el resultado de las experiencias que se tienen en el curso de Álgebra y Geometría dentro de la modalidad de Cátedra Coordinada de Matemática, llevada a cabo en cinco Programas de Ingeniería de la Universidad Católica de Santa María de Arequipa con la participación de 8 profesores, 7 jefes de práctica y 984 alumnos, .

Se describe los niveles de uso de la herramienta virtual Mymathlab por parte del alumnado y su repercusión en el rendimiento académico. También a través de una encuesta, se encuentra aceptables niveles de satisfacción de alumnos y profesores con esta forma de trabajo.

Este artículo está dirigido al personal académico interesado en implementar ambientes virtuales para el aprendizaje en los primeros cursos de Matemática para Ingeniería.

Palabras clave: Cátedra Coordinada, ambientes virtuales de aprendizaje, rendimiento académico, satisfacción.

Referencias

Botero Ch., C. A. (2009). Cinco Tendencias de la Gestión Educativa. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Claro, M. (2010). *Impacto de las TIC en los aprendizajes de los estudiantes. Estado del arte*. Santiago de Chile: CEPAL.

CNE. (2007). *Proyecto Educativo Nacional al 2011*. Lima: Consejo Nacional de Educación.

Coral González, B. (2003). *Factores Determinantes del bajo rendimiento académico en educación secundaria.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

Diaz B., L. F. (2009). *Reporte técnico curso de Algebra y Geometría*, en el Marco de la Cátedra Coordinada de Cursos de Matemática. Universidad Católica de Santa María, Arequipa.

Diaz, L., & Ramos, W. (18 de Mayo de 2009). *Proyecto educativo Cátedra Coordinada de Matemáticas en la FCIFF. FCIFF* - Arequipa.

Garbanzo Vargas, G. M. (2007). *Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios, una Reflexión desde la calidad de la Educación Superior Pública.* Redalyc, 44-63.

Gutierrez P, F., & Prieto C., D. (1999). *La mediación pedagógica. Apuntes para una educación a distancia alternativa.* Buenos Aires: CICCUS - La Crujía.

Mymathlab. (2010). *Información del producto MyMathLab*. Recuperado el 5 de 10 de 2010, de http://www.mymathlab.com/espanol/product_info.html

Padula Perkins, J. E. (2005). Control de Calidad y Educación a Distancia. *Revista Iberoamericana de Educación* (ISSN: 1681-5653).

❖❖❖

Introducción del concepto derivada: un estudio con estudiantes universitarios de humanidades

Juan Carlos Sandoval Peña
Universidad San Ignacio de Loyola-Perú
jsandoval@usil.edu.pe

Jesús Victoria Flores Salazar
Pontificia Universidad católica del Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

El presente artículo, forma parte de la tesis de Maestria en Enseñanaza de las matemáticas, que aún está en elaboración. La experiencia docente nos respalda al afirmar que la comprensión de la derivada presenta dificultades en estudiantes del primer ciclo universitario de humanidades. En ese sentido el estudio que iniciamos tiene el propósito de dar una alternativa que permita aminorar las dificultades que estos estudiantes enfrentan al realizar el estudio de las derivadas.

Palabras clave: Derivada, *Design Experiment,* Laboratorio Matemático, Registro de Representación Semiótica.

Introducción

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada justifican este estudio, así tenemos; Azcárate y Cols. (1997) señalan la necesidad de partir de las concepciones previas que tienen los estudiantes acerca de la velocidad, utilizando las representaciones gráficas de las funciones para visualizar ideas, en especial la de razón de cambio media como pendiente de una recta. Sánchez- Matamoros (Sánchez-Matamoros 2004; Sánchez- Matamoros et al., 2006) caracterizó distintos niveles de comprensión de la derivada (niveles: intra, inter y trans) a través de la manera en la que los estudiante coordinaban el uso de los diferentes modos de representación. Además, debemos considerar la experiencia de docentes universitarios de la universidad en el trabajo, que

corrobora las dificultades de los primeros ciclos con estudiantes de 16 a 18 años en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.Esta situación, nos lleva a formular las siguientes preguntas de investigación: ¿De qué manera un laboratorio matemático favorece los procesos de aprendizaje sobre la comprensión del concepto de la derivada en estudiantes universitarios de humanidades?¿Qué tipo de representaciones utilizan los estudiantes cuando desarrollan actividades que les permitirán entender el concepto matemático de la derivada?¿En qué medida, el uso de la calculadora en red wiris, favorece el aprendizaje del concepto de derivada?

Marco Conceptual

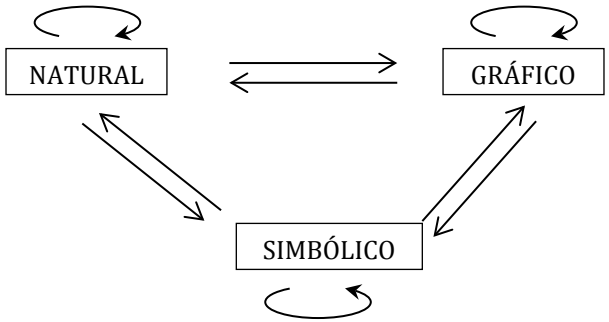
Para intentar responder a los problemas de investigación nos apoyaremos en algunos aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004). La teoría de registros de representación semiótica, plantea el análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento.

Duval (2004) sostiene que la sémiosis está relacionada con las representaciones y la considera como aquellas producciones constituidas por el empleo de signos: enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc. No parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles a los otros. Asegura que las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación.

Duval (1998,2004) se refiere a los sistemas de representación semiótica como aquellos que tienen características particulares y permiten sostener la conceptualización en la matemática y, no solamente están sujetas a la comunicación, sino lo importante es la actividad cognitiva del pensamiento. El mismo autor señala que las representaciones semióticas deben cumplir las siguientes funciones: a) la función de comunicación (intercambio social), b) objetivación (toma de conciencia) y c) tratamiento (manipulación de la información).

Por lo tanto, los registros son medios de expresión y de representación caracterizados precisamente por sus respectivos sistemas semióticos y es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación. Los conceptos matemáticos admiten una gran variedad de registros de representación; este trabajo se interesa en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión del concepto de derivada, el cual se puede analizar al menos de tres representaciones, como: lo gráfico, lo simbólico y lo natural.

En el iguiente esquema, se muestra los tres sistemas de representación mencionados anteriormente y que generan las posibles conversiones de un sistema a otro o tratamientos dentro de cada sistema.



Duval (2004) afirma que solo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un sistema semiótico como un sistema de representación. Indica, además, que siendo un sistema semiótico debe cumplirse tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, así:

En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificadas como una representación de alguna cosa en un sistema determinado, esa está en una frase, dibujo, fórmula escrita, esquemas, etc. Comprende una selección de rasgos y datos que se pueden representar;

responden a reglas que permiten asegurar las condiciones de identificación y tenga la posibilidad de su utilización en otra actividad cognitiva. Luego, el tratamiento de una representación lo cual significa la transformación de la representación en el mismo registro, de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, debemos pensar en una transformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

Por último, la conversión de una representación de un registro a otro manteniendo la totalidad o parte de la representación inicial, es decir la conversión es una transformación externa al registro de partida. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. Son operaciones de conversión la traducción, la ilustración, la transposición, la interpretación, la codificación, entre otras.

La investigación plantea que en un estudio sobre los aprendizajes intelectuales se deben considerar los aspectos mencionados en parrafo anterior ya que para el estudiante una representación puede actuar como tal, sólo cuando se dispone de al menos dos sistemas semióticos diferentes y cuando se puedan convertir las representaciones de un sistema semiótico a otro, de una manera automática.

Marco Metodológico

Dado lo relevante de la investigación acerca de la comprensión de la derivada y su tratamiento en el mismo proceso de la investigación, donde estudiantes, docente e investigadores van generando nuevos datos de los planificados, el trabajo amerita una metodología acorde con lo tratado, por ello lo apropiado seria utilizar “Design Experiments” como metodología de nuestra investigación.

En base a esta visión de investigación, utilizaremos los “Design Experiments”. Según Coob (2003), representan un tipo de metodología cuyo objetivo es analizar procesos de aprendizaje

de dominio específicos, en nuestro caso el dominio específico es la función derivada. Sin embargo, ellos no representan simplemente una colección de actividades direccionadas al aprendizaje de un determinado dominio, sin limitarse, por tanto, a una secuencia de actividades. En verdad, este tipo de metodología es un sistema complejo e interactivo, envolviendo múltiples elementos de diferentes tipos y niveles. Esto ocurre por medio del modelamiento de sus elementos y de la anticipación de cómo esos elementos funciones en conjunto, para dar soporte al aprendizaje.

"Design Experiments" pueden ocurrir de diversas maneras, dependiendo de la función o enfoque que se aplican. Este tipo de metodología puede manifestarse entre profesor-investigador y un grupo restringido de estudiantes o como experimentos aplicados en clases más numerosas, como trabajos volcados a la organización de la educación de futuros profesores. Ellos también pueden ser vistos como experimentos pensados a dar soporte al desarrollo de una comunidad profesional.

Según Kelly (2003) la principal consideración de esta metodología es que el uso de métodos que conectan los procesos de actuación con los resultados tiene el poder de generar conocimientos de aplicación directa a la práctica. Se persigue comprender los procesos de enseñanza y de aprendizaje cuando el investigador actúa activamente como educador, abordando simultánea e iterativamente los procesos científicos de descubrimiento, exploración, confirmación y diseminación.

Cuando el profesor–investigador identifica en los estudiantes raciocinios ricos repletos de implicaciones para futuras interacciones se pasa a establecer una forma de interacción analítica. En este tipo de acción el profesor–investigador adquiere un sentido de dirección y visualiza las posibilidades del camino que utilizaran los estudiantes en otras palabras él formulará una imagen de operaciones mentales de los estudiantes y el itinerario sobre lo que deben aprender y uno debe conducir este aprendizaje. En el trabajo del laboratorio

hay un espacio donde los estudiantes al trabajar en equipos de cuatro, son interrogados por el profesor–investigador que va guiando poco a poco hacia la solución del problema, con posibilidad de que los estudiantes den pequeñas respuestas como la de una participación larga con posibilidades de diálogos entre estudiantes y el profesor.

De este modo, el objetivo principal de profesor–investigador es el tipo de metodología es establecer modelos vivos de la matemática en estudiantes en otras palabras crear medios de interacción que permita alentar a los estudiantes a modificar sus pensamientos de todos. Para ello, los estudiantes deben ser entendidos como seres humanos capaces de ofrecer contribuciones independientes.

Esta investigación se realiza con una población de 40 estudiantes cuyas edades están comprendidas entre los 16 y 18 años del primer ciclo de humanidades de una universidad particular de Lima. A partir de dicha población se seleccionará una muestra de 20 estudiantes, entre aquellos que demostraran mayor responsabilidad e interés para mejorar su rendimiento en matemática en especial en la comprensión de la derivada.

La propuesta debe ser elaborada como una forma alternativa para el dominio propuesto, especificando el punto de partida intelectual y social del estudiante. En primera instancia, conjeturas deben ser levantadas al respecto de interpretaciones iniciales de los estudiados. Para eso, cabe establecer un trabajo piloto documentado los resultados, para que se puedan desenvolver nuevos métodos de acceso a aspectos de raciocinio de estudiantes. Con tales datos, la etapa seguida consiste en especificar un punto de partida, los elementos de trayectoria de puntos futuros, teniendo como meta formular un proyecto inicial que sea capaz de provocar conjeturas, sobre cambios expresivos de raciocinio de estudiantes, especificando los significados que dan a suponer estos cambios. En nuestra investigación se tomo una encuesta a los estudiantes que permitió conocer sus fortalezas y dificultades para el trabajo en el laboratorio; así, en promedio

los estudiantes estudian muy poco horas adicionales de matemáticas, en su mayoría llevan el curso de matemática que estudia la derivada por primera vez.

Resultados parciales

La parte experimental se inicia con una prueba diagnóstica sobre saberes básicos de funciones. Luego, los estudiantes participan en un laboratorio matemático, que definiremos como un espacio de aprendizaje, extra curricular donde los estudiantes resuelven situaciones problemas de: razón de cambio promedio, razón de cambio instantáneo y derivada en un punto y derivada de una función.

Los experimentos de enseñanza y aprendizaje que han de tener como base los conocimientos mínimos sobre funciones, permitirán una adecuada comprensión de la derivada, dicha aprensión se han de desarrollar en el laboratorio que permitan optimizar la información relevante y observable.

Los estudiantes al enfrentar a situaciones problema relativos a la comprensión de la derivada, desarrollan actividades primero en forma individual y luego socializan sus problemáticas formando grupos de cuatro estudiantes. El docente participa como facilitador y apoyo permanente de los estudiantes.

Después de la aplicación de la primera fase (razón de cambio promedio) observamos grandes avances sobre el aprendizaje de este concepto. Así, los estudiantes transitaron por diversos registros de representación e observamos que comprendieron con claridad el concepto que trabajamos en esta fase. Despues de terminar con la parte experimental, elaboraremos un rediseño del experimento para lograr los objetivos trazados en la tesis.

Referencias

Azcàrate, Carmen; Bosch, Daniel; Casadevall. Martin y Casellas, Esther (1996) *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Editorial Síntesis

D´Amore, Bruno (2005). *Didáctica de la Matemática*. Mexico: Revertè.

Duval, R. (2004) *Semiosis y pensamiento Humano*. Universidad del Valle, Colombia: Grupo de educación Matemática.

Mochón, Simón (1994) *Quiero entender el Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú, Rusia: Mir.

Stewart, J(2006). *Càlculos trascendentes tempranas*. Mèxico: cuarta ediciòn: Thomson

❖❖❖

Formación de docentes de educación básica, utilizando técnicas del programa de filosofía para niños aplicado a las matemáticas

Diógenes Eduardo Molina Morán
Universidad Laica Vicente Rocafuerte de Guayaquil - Ecuador
edo_molina@yahoo.com

Resumen

Experiencia llevada con 40 docentes de Educación Básica de una red educativa del Ecuador aplicando el método de Filosofía para Niños, donde la aclaración de conceptos matemáticos profundizó y mejoró el dominio de los mismos, el lenguaje, la argumentación, la producción de estrategias didácticas para su enseñanza, además de mejorar la actitud matemática en un 70%. Las técnicas utilizadas generaron un desequlibrio cognitivo que llevó al colectivo a asociarse gradualmente hasta convertirse en una *comunidad de indagación*, donde la discusión se intensificó hasta un nivel filosófico.

Palabras clave: Matemática, conceptos, profesorado, filosofía para niños.

Introducción

El resultado de las evaluaciones nacionales de matemática del Ecuador (Pruebas SER, 2008) revela que el 80% de chicos de 15 años se sitúan entre regulares e insuficientes, al igual que el 69% de los niños de 9 años.

Motivada por ello, la red Fe y Alegría ejecutó un programa de formación docente en pensamiento lógico matemático, el cual fue escenario de una intervención de técnicas del programa de Filosofía para Niños sobre Matemática. Se planteó los siguientes objetivos: 1) Mejorar la actitud de los docentes hacia el aprendizaje de la matemática, 2) Aclarar conceptos matemáticos del currículo de educación básica, y 3) Producir por parte de los docentes, estrategias didácticas para la enseñanza de conceptos matemáticos.

Marco Teórico

Los filósofos, matemáticos y docentes siempre dirigieron su atención y siguen haciéndolo, a conceptos como el infinito, lo irracional, lo imaginario, el vacío, etc.; filosofar sobre estos conceptos no pasa de moda y ayuda a tener una profundidad de ellos (De la Garza et al, 1999).

El programa de Filosofía para Niños trata sobre pensar sobre el pensamiento (Nickerson et al, 1995), aprovecha las preguntas filosóficas de los niños para transformarlos en sujetos reflexivos, oyentes, y dialogantes (Lipman et al., 1998), y el aula se convierte en una comunidad de investigación caracterizada por la constancia en el estudio autocorrectivo y creativo de temas enigmáticos. Este programa adaptado a las matemáticas permite aclarar conceptos, disminuir la ansiedad, mejorar la actitud (Lafortune, 2003), y lograr aprendizajes significativos por medio del asombro, porque solo así se genera interés por profundizar en los fenómenos (Lebedinsky, 1984).

A veces los adultos dejan de buscar el por qué de las cosas, muchos de los niños de hace 20 años son ahora maestros, y el cuestionarlos sobre conceptos que deben dominar provoca un conflicto y la toma de conciencia de estar enseñando conceptos que no dominan (Molina, 2011).

Método

Dentro del enfoque cualitativo se eligió la *investigación cooperativa* como tipo de *investigación acción*, que se da cuando miembros de dos instituciones se agrupan para resolver problemas de la práctica profesional, vinculando procesos de investigación y formación (Bartolomé, 1994).

La intervención fue una convivencia distribuidas en 3 encuentros de 3 días cada uno, en total 9 días, en los meses de mayo, agosto y diciembre del 2010, se trabajó un volumen de 60 horas presenciales y 20 horas de tutoría en línea. La población fue de 42 docentes de la red: 6 pedagogos, 23 técnicos y 14 maestros de aula. Durante los encuentros se

utilizaron técnicas cualitativas como el diario de campo y portafolio.

Técnicas 1er encuentro: 1) Crear problemas partiendo de su respuesta (Cohan, 2009), 2) Resolver problemas por medio de representaciones gráficas (Hervas, 2010), 3) Entrevista del tutor a profesores sobre sus experiencias en su formación matemática escolar (Tobias, 1993).

Técnicas 2do Encuentro: 1) Definir algunos conceptos discutidos por el grupo, 2) Aclaración y redefinición de conceptos, y 3) Modelar una clase sobre esos conceptos, con la orden de no pronunciar el nombre del concepto.

Técnicas 3er Encuentro: 1) Exponer la respuesta a una pregunta matemática epistemológica por cada docente, 2) Congreso con ponencias presentadas por los docentes, y 3) Debate sobre geometría euclidiana y geometría no euclidiana entre 2 docentes, 4) Aplicación del test de actitud hacia la matemática de Fennema-Sherman.

Resultados

Primer Encuentro: En 2 horas los docentes crearon 288 problemas, 162 de operaciones básicas y 126 algebráicos, la reconstrucción de problemas genera un inusual conflicto cognitivo, generalmente las relaciones entre conceptos se establecen para construir sobre ellas, y no para elaborar su historia o reconstrucción de los mismos (Cohan, 2009). La estrategia bajó las resistencias de los sujetos y generó la unión del colectivo para colaborar (Roeders, 2006). La comunidad de indagación surgió de la necesidad de solucionar un problema, y su discusión accedió a un primer nivel filosófico. El 70% de los profesores autorreconocieron una actitud negativa hacia la matemática, incluso hubo 4 testimonios de historias calificables de "maltrato pedagógico" (Balderrama, 1997).

Segundo Encuentro: Se contrastó las definiciones pre-post de los conceptos matemáticos, corroborando que los docentes no suelen dudar de sus conocimientos e incluso perciben sus competencias didácticas como fortalezas (Fandiño y Castaño,

2009), ellos concluyeron que es básico dominar los conceptos matemáticos para planificar una enseñanza adecuada (Gil et al, 1991).

Cuadro 2: Forma de respuesta a pregunta epistemológica

Concepto	**Definición Pre Aclaración**	**Definición Post Aclaración**
Plano	Figura formada por líneas.	Figura geométrica cerrada formada por segmentos de líneas.
Deducción de la fórmula del área de un triángulo	Es $\frac{b \times a}{2}$	Proviene del área de un rectángulo al trazar su diagonal formando dos triángulos iguales entre sí, la fórmula es la mitad del rectángulo.
Clasificación de los ángulos	Ángulo Recto tiene 90 grados, agudo es menor de 90 grados y obtuso más de 90 grados.	Ángulo Recto está conformado por líneas perpendiculares, el agudo cuando esas líneas se cierran y el ángulo obtuso cuando se abren.
Perímetro	Es la suma de los lados de una figura geométrica	Longitud que rodea a un plano y se lo halla midiendo el contorno.

La discusión conceptual se enriqueció al diseñar la estrategia didáctica sin el uso del "término", esta se centró en aspectos epistemológicos y llevó a una aplicación más sistemática de procesos cognitivos para construir una correcta definición y estrategia (Tomaschewsky, 1969).

Tercer Encuentro: Para responder la pregunta matemática epistemológica se usó el diccionario, textos y la discusión en el grupo de indagación; siendo su protocolo de respuesta: 1) Identificar y definir conceptos dentro de la pregunta, 2) establecer cualidades y relaciones entre conceptos, 3) argumentar respuesta, y 4) dar un ejemplo.

Cuadro 2: Forma de respuesta a pregunta epistemológica

Solución	**Recurso Utilizado**	**Número de Docentes**
Individual	Ninguno	7
Individual	Diccionario y texto de matemáticas	5
Grupo	Diccionario y texto de matemáticas	30

El 100% de docentes cumplieron el protocolo y aclararon 62 conceptos y la comunidad de indagación se dio a ratos sin la participación del facilitador. El 43% de los asistentes presentó trabajos en el congreso. Por último, el test de actitud de Fennema-Sherman arrojó una media de 172 (Actitud Positiva Leve) y una s=28.17, siendo la dimensión *Problemas de Matemáticas* la que mejor actitud presentó (media=45.3; s=6.36) y la de *Profesor de Matemáticas* la de peor actitud (media=40.3; s=6.88), la dimensión con mayor dispersión fue *ansiedad* (media=42.6; s=9.77). Es posible que aunque la actitud a los problemas mejoró, no influyó en la modificación de percepciones sobre el profesor, conflicto observado durante los encuentros.

Conclusiones

La "comunidad de indagación" permite un aprendizaje de conceptos matemáticos en un entorno emotivo, y la discusión del colectivo llega a un nivel filosófico; además de mejorar la creación de estrategias didácticas y la enseñanza. Por último, el reencuentro con la materia se torna una ocasión para reescribir su historia matemática.

Anexo

Preguntas formuladas a cada participante

1. ¿Se pueden sumar restas?
2. ¿Tiene ángulos un semi círculo?
3. ¿Es toda variable una incógnita?
4. ¿Por qué un círculo no tiene diagonales?

5. Si el universo es infinito, ¿Es infinito todo "conjunto universo"?
6. ¿Es divisible el infinito?
7. ¿Es lo mismo *Cero* que *Vacío*?
8. Al definir un conjunto unitario, ¿Es lo mismo "es el que tiene un solo elemento" que "es el que tiene un único elemento"?
9. ¿Cómo lo finito se puede convertir en infinito?
10. Si la estadística es inexacta pero es parte de las matemáticas, ¿Son exactas las matemáticas?
11. ¿Es lo mismo *igual* que *idéntico*?
12. ¿Cuál es la diferencia entre volumen y capacidad?
13. ¿De qué manera una unión de dos conjuntos unitarios resulta un conjunto universo?
14. ¿Es lo mismo *aproximación* que *estimación*?
15. ¿Es el cero un número par?
16. ¿Es el cero un múltiplo?
17. Si sumamos todos los números positivos con todos los negativos, ¿qué nos queda? ¿Todo o nada?
18. ¿Cuál es la diferencia entre igualdad y congruencia?
19. ¿Dónde nace el infinito?
20. ¿Cuál es la diferencia entre factorar y descomponer?
21. ¿Cuál es la diferencia entre medida y patrón?
22. ¿Es lo mismo *submúltiplo* que *divisor*?
23. ¿Cuál es la diferencia entre factor y divisor?

Referencias

Balderrama, M. (1997). *Así opinan los niños, niñas y jóvenes ecuatorianos; Los derechos de los niños y su autoestima*. Quito. DNI Ecuador.

Bartolomé, M. (1994). *La investigación cooperativa*. En V. García Hoz (Dir.) *Problemas y métodos de investigación en educación*. Madrid. Rialp.

Cohan, W. (2009). *¿Qué es filosofía?* Café filosófico. [Video]. Video descargado el 4 de abril del 2011 del sitio web: http://www.youtube.com/watch?v=l5GhvhRe4XE. Buho Rojo Lima.

De la Garza, M. y Slade, C. (1999). *Phylosophy of mathematics in the classroom: Aspects of a tri-national study*. Paper presented in a panel of the Interamerican Congress of Phylosophy. Puebla, México.

Fandiño, G., y Castaño, E. (2009). Haciéndose maestro: el primer año de trabajo de las maestras de educación infantil. Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado.* Vol. 13, Núm. 1, abril -sin mes, pp. 117-128.

Gil, D.; Carrascosa, J.; Furió, C. & Martínez-Torregosa, J. (1991). *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*. Colección Cuadernos de Educación. Num 5. Barcelona. ICE/HORSORI.

Hervas, D. (2010). *Reconstruyendo puentes entre el Algebra y la Geometría*. Ponencia presentada en el XII Encuentro de Matemáticas y sus Aplicaciones. Quito. Escuela Politécnica Nacional.

Lafortune, L., Daniel, M., Mongeau, P. y Pallascio R. (2003).Philosophy for Children Adapted to Mathematics: A Study of its Impact on the Evolution of Affective Factors. ANALYTIC TEACHING Vol.23, No 1.

Lipman, M., Sharp, A. y Oscayan, F. (1998). *La filosofía en el aula*. Madrid. Ediciones La Torre.

Molina, E., Verdezoto, R. y Merizalde, F. (2011). *Análisis de los conceptos matemáticos en estudiantes de la carrera de Educación de Párvulos de la ULVRG*. Ponencia del VIII Encuentro de Ex becarios de Israel en América Latina y el Caribe. Cartagena 2011.

Molina, E. (2011). *Formación de profesores de preescolar: Conceptualizaciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Tesis no publicada. Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.

OCDE, PISA (2009). Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I). http://dx.doi.org/10.1787/978926409

Piaget, J. (1973). *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático*. Buenos Aires. Paidós.

Popkewitz, Th. S. (1988). *Paradigmas e ideología en investigación educativa.* Mondadori.

Pruebas SER. (2008). Documento descargado del sitio Web: ww.educacion.gov.ec/_upload *ResultadoPruebasWEB.pdf* - Similares

Roeders, P. (2006). *Aprendiendo juntos*. Lima. Editorial Alfaomega.

Tobias, S. (1993). *Overcoming math anxiety, revised and expanded*. Tucson. Norton & Company.

❖❖❖

Enseñanza de la función logarítmica por medio de una secuencia didáctica basada en sus representaciones con uso del software Geogebra

Zenón Eulogio Morales Martínez
Universidad César Vallejo Lima
morales.ze@pucp.edu.pe

Resumen

Este estudio tiene como objetivo elaborar, aplicar y analizar una secuencia didáctica aplicad***a*** al tema de la función logarítmica utilizando el *software* Geogebra como una estrategia pedagógica. Para desarrollar esta propuesta tomamos como aporte teórico la Teoría de los Registros de Representación y Semiótica descrita por Raymond Duval (2009) y los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado según Dreyfus (1991). La aplicación de esta propuesta didáctica emplea como marco metodológico la propuesta de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). La secuencia didáctica se aplica a estudiantes del ciclo formativo de la Universidad César Vallejo, UCV, sede Lima. También se aplicó a alumnos egresados de secundaria de diversos colegios de Lima, reunidos en la Institución Educativa Agroestudio.

Palabras clave: Funciones, Registros de Representación Semiótica, Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, *Software* GeoGebra.

Fundamentación

El objetivo de la presente investigación es elaborar, aplicar y analizar una secuencia didáctica para la enseñanza de la función logarítmica, proponiendo a los estudiantes actividades que permitan la conversión entre los diversos registros; utilizar el *software* GeoGebra para favorecer la visualización de las representaciones gráficas de modo dinámico; y estudiar los procesos mentales que realiza el alumno cuando aprende el objeto matemático en estudio.

En la exploración de investigaciones realizadas sobre funciones en nuestro país y en otros países nos ha mostrado que "de las producciones analizadas por Ardenghi (2008), observamos que existen muchas investigaciones sobre función afín y cuadrática y pocas sobre función exponencial y logarítmica" (Santos, 2011). Esto ha motivado el interés por el estudio de esta función. En el desarrollo de la secuencia didáctica, nos interesó observar qué procesos cognitivos realizan los estudiantes cuando realizan su aprendizaje y nosotros como maestros qué procesos esperamos que realicen.

Ecuación en forma Exponencial	Ecuación en forma Logarítmica	Cálculo del Logaritmo
$2^x = 8$	$\text{Log}_2\ 8 = x$	x = 3
$5^x = 125$	$\text{Log}_5\ 125 = x$	x = 3
$10^x = 100$	$\text{Log}_{10}\ 100 = x$	x = 2
$2^x = 32$	$\text{Log}_2\ 32 = x$	x = 5
$3^x = 243$	$\text{Log}_3\ 243 = x$	x = 5

Fig. 01: Relación entre la ecuación exponencial y logarítmica

Representaciones semióticas

La formación del pensamiento científico, particularmente en matemática, está íntimamente ligado al desarrollo de simbolos específicos para representar los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos requiere la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos.

Para lograr este hecho Duval (1999) desarrolla los conceptos de representación semiótica y de articulación de registros. Delimita entonces que las representaciones semióticas, como producciones constituidas por el empleo de símbolos, son relativas a un sistema particular de signos (lenguaje, escritura algebraica, gráficos cartesianos, etc.) las cuales pueden ser convertidas en representaciones "equivalentes" en otros sistemas semióticos. Tales sistemas deben permitir el cumplimiento de las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación, es decir, la formación de

representaciones en un registro semiótico particular, así como las dos actividades ligadas a la propiedad fundamental de toda representación semiótica, su transformabilidad en otras representaciones que conserven todo el contenido de la representación inicial o una parte del mismo. Esta última abarca tanto la transformación de las representaciones de un objeto en un mismo registro, denominado tratamiento, como de un registro a otro, la conversión. Duval (2009) destaca que es a través de la coordinación entre los registros lo que permite la adquisición de conocimientos. Nos afirma que, "la comprensión de un contenido conceptual reposa sobre la coordinación de al menos dos registros de representación, y esa coordinación se manifiesta por la rapidez y espontaneidad de las actividades de conversión" (Duval, 2009, p. 63)

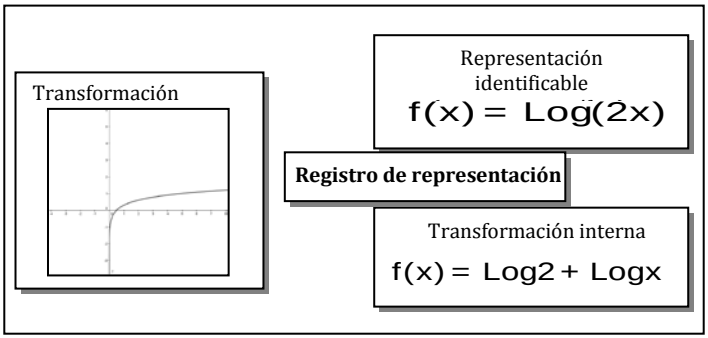


Fig. 02 Esquema de un registro de representación semiótica

Procesos del Pensamiento Matemático Avanzado

Según Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y se obtiene a través de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Los principales procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de matemática son analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, definir, demostrar, formalizar, pero resulta evidente que estos tres últimos adquieren mayor importancia en los cursos superiores: la

progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Otros procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar.
Los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado, PMA, observados en los estudiantes nos permite evaluar como el estudiante realiza las distintas conversiones de representaciones, como realiza generalizaciones y abstracciones. Estos procesos son relevantes para la comprensión de un concepto matemático.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
Procesos del PMA involucrados	Mudanza de Representación, generalización	Visualización, levantamiento de conjeturas, Mudanza de Representación, generalización	Visualización, levantamiento de conjeturas, Mudanza de Representación, generalización

Fig. 03: Resultados de procesos del PMA en tres grupos de estudiantes.

Componente tecnológica: *software* GeoGebra

El uso del *software* GeoGebra como estrategia didáctico-pedagógica contribuyó en el aprendizaje de los estudiantes. Todos los alumnos destacaron la importancia de la visualización del gráfico de la función en el *software*, así como la posibilidad de hacer las traslaciones o comparaciones con otras funciones de modo rápido y dinámico.

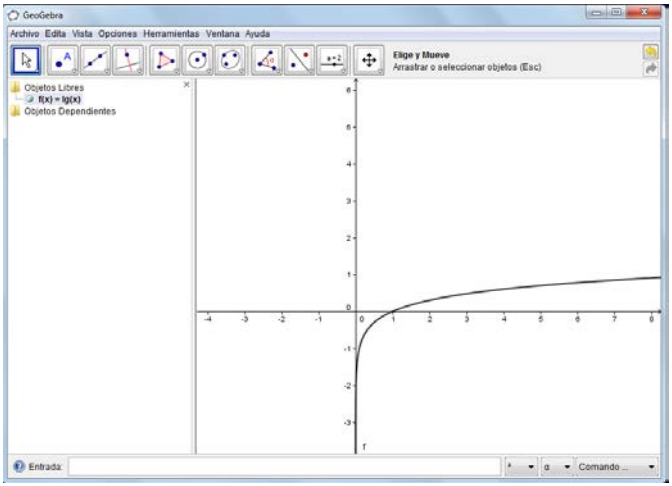


Fig. 04: Registro gráfico de f(x)=log(x) en software GeoGebra

Aplicación de la Investigación

La aplicación de esta secuencia didáctica se realizó a un grupo de 5 alumnos del ciclo formativo de la UCV, en los resultados se analizaron las dificultades encontradas, la estrategia de resolución, el aprendizaje y su abstracción de los conceptos, la conversión de los registros y los procesos del PMA involucrados cuando los estudiantes realizaron las actividades de aprendizaje del objeto en estudio. En el nivel universitario, el estudio de las funciones se presenta en los cursos de matemática del primer ciclo en las distintas universidades.

Consideraciones Finales

En la etapa final de esta investigación llegamos a algunas consideraciones finales como: el uso de los distintos registros para hacer representaciones de un mismo objeto matemático contribuye de manera eficaz en el aprendizaje que realizan los alumnos y nosotros los maestros debemos aprovechar esta variedad de representaciones para realizar un proceso de enseñanza con mejores frutos. También se llega a la conclusión que la aplicación de la secuencia didáctica utilizando el

software GeoGebra fue una estrategia eficiente para lograr los objetivos propuestos inicialmente. Consideramos la propuesta de Duval en la conferencia del XIII CIAEM (Brasil, 2011) cuando propone que "uno puede preguntarse acerca de la utilidad y la verdadera contribución de la educación matemática para la mayoría de los estudiantes. (El tema clásico de los intereses de la enseñanza de las matemáticas)

- Más allá de la simple adquisición de técnicas de la información, el aprendizaje de la matemática ayuda a desarrollar su capacidad de pensar, de imaginar, para organizar la información.
- Con el fin de que los estudiantes puedan sentir que las matemáticas contribuyen al desarrollo general de su mente, debemos enseñar matemáticas de forma diferente.

Referencias

Artigue, M. (1996). *Engenharia Didáctica*. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano*. *Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Sao Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced Mathematical Thinking Processes*. Holanda: Kluver Academic Plubisher.

Lopes, L. (1999). *Manuas das Funcoes Exponeciais e Logarítmicas*. Brasil: Editorial Interciéncia.

❖❖❖

Uso de recursos digitales en el bachillerato

Domingo Márquez Ortega
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM - México
marquez_od@yahoo.com.mx

Resumen

En la actualidad nuestros estudiantes deben prepararse para incorporarse a un entorno laboral muy diferente al que existía hace solo diez años atrás. Los futuros profesionistas se enfrentarán a problemas mucho más complejos que abarcan conocimientos de varias disciplinas demandando enfoques innovadores y nuevas habilidades para la resolución de esos problemas. Dentro de estos conocimientos y habilidades demandados a los profesionistas están los de matemáticas los cuales son esenciales para la solución de problemas, y una de las metodologías de enseñanza de las matemáticas más innovadoras y eficientes es la del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP).

Palabras clave: Metodología, aprendizaje, problemas, habilidades, conocimiento.

Referencias

Álvarez, M., Fernández, A. & Anzola, E. (1994). Incorporación de la computadora a la impartición de la Matemática numérica. *Revista Cubana de Educación Superior*, 14(2).

Azinian, H. Resolución de problemas matemáticos. Visualización y manipulación con computadora, *Novedades Educativas*, Buenos Aires

Barrows H.S. (1986) A Taxonomy of problembased learning methods, *Medical Education*, 481-486.

Barrows H. (1996) Problem-Based learning in medicine and beyond: A brief overview. In *WILKERSON* L.

Gijselaers W.H. (eds) Bringing Problem-Based Learning to Higher Education: *Theory and Practice*, San Francisco: Jossey-Bass Publishers, pp. 3-12.

Boud, D., Feletti, G. (1997). *The Challenge of Problem-Based Learning*. Stirling, USA: Kogan Page.

Duch, B. (1996). *Problems*: A Key Factor in PBL. UD PBL – Spr´96 About Teaching. http://www.udel.edu/pbl/cte/spr96-phys.html

Hohenwarter, M.; Fuchs, K.; (2005): Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in *the Software System GeoGebra Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teachings*, 128-133.

❖❖❖

Una experiencia de aprendizaje basado en problemas en didáctica de la matemática

Martha Cecilia Mosquera Urrutia
Universidad Surcolombiana - Colombia.
martha.mosquera@usco.edu.co

Resumen

Para el caso de esta experiencia, se entenderá El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como un método didáctico que permite al estudiante para profesor, desarrollar capacidades, conocimientos y habilidades, que le permitan identificar, analizar y proponer alternativas de solución a los problemas de enseñanza y/o aprendizaje de la matemática, de manera eficaz, eficiente y humana, utilizando principalmente la Investigación Como Estrategia Pedagógica (IEP) (Manjarrés y Mejía, 2009). La IEP es una estrategia del Departamento Administrativo de Ciencia Tecnología e Innovación (COLCIENCIAS), que busca en síntesis que los niños, las niñas y los jóvenes aprendan a investigar investigando y que los maestros y maestras sean orientadores y coinvestigadores en este proceso; para desarrollarla se necesitan maestros y maestras capaces de usar la investigación como método de enseñanza, estrategia de aprendizaje y estrategia de trabajo.

El Aprendizaje Basado en Problemas implica la formación de equipos de trabajo integrados por personas con diferentes intereses, los cuales han logrado detectar problemáticas a través del acercamiento a las instituciones educativas, el diálogo con los estudiantes y los docentes y el análisis de las pruebas diagnósticas diseñadas y aplicadas por ellos en dichas instituciones y trabajan juntos en el diseño de propuestas alternativas para solucionarlas. Estas diferencias ofrecen grandes oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje y prepararan a los estudiantes para profesor, para trabajar en ambientes diversos y globales.

Para que los resultados de este método sean exitosos, se requiere de un modelo pedagógico definido y unas estrategias propicias para operacionalizarlo, la definición de roles y fundamentos de diseño de proyectos de investigación, la disposición y apertura al cambio de los estudiantes para profesor y de los docentes en ejercicio; a través de la implementación de esta experiencia se ha notado que a medida que docentes y estudiantes interactúan para planear y trabajar, aprenden a desarrollar relaciones sin importar lo diferentes que sean sus experiencias previas. Estas relaciones se basan en confianza, esfuerzo conjunto y comunicación. Cuando se trabaja en aprendizaje basado en problemas con equipos de estudiantes y docentes en ejercicio, están incluidas sensibilidades interculturales y habilidades de lenguaje, que típicamente no se requieren en modelos de enseñanza-aprendizaje y prácticas profesionales docentes tradicionales.

El modelo es de tipo constructivista y se apoya en las bases de la pedagogía para el desarrollo del aprendizaje autónomo, se enfoca al aprendizaje como el resultado de construcciones mentales; esto es, que los seres humanos, aprenden construyendo nuevas ideas o conceptos, con base en conocimientos actuales y previos; para el diseño de las propuestas se requiere de aprendizajes básicos como: análisis y planteamiento de un problema, formulación de objetivos, delimitación del problema o situación a resolver, identificación de los perfiles de los actores involucrados, etc. Y su impotancia principal radica en que se desarrollan actividades de aprendizaje interdisciplinarias, de largo plazo y centradas en el estudiante

Se espera que en el mediano plazo y con base en el análisis de las ventajas y desventajas de la aplicación de estas propuestas, los profesores y los consejos directivos y académicos de las instituciones educativas, evalúen en forma realista la magnitud de los problemas escolares

para saber hasta dónde se puede implementar este modelo.

Introducción

Esta experiencia se realiza con los estudiantes del curso de DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA I del Programa de Licenciatura en Matemáticas, se basa en el análisis de problemas de aula, este análisis se hace para aprender a activar conocimientos previos, detectar problemas subyacentes a dicho problema desde diferentes perspectivas y buscar la información adecuada para proponer alternativas de solución; su importancia radica en que al enfrentar a los futuros docentes a problemas reales que ocurren en un aula de clase y que ellos y ellas descubren a través del diálogo con los docentes y estudiantes, se logra un alto grado de sensibilización, generación de conocimiento y desarrollo de la creatividad

Objetivo General:

Aprender a identificar problemas de enseñanza y aprendizaje de la matemática y a diseñar ambientes de aprendizaje propicios para su solución.

Objetivos específicos:

- Utilizar problemas reales de aula como punto de partida para la adquisición e integración de nuevos conocimientos
- Aprender a definir objetivos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar
- Estudiar los aspectos legales en cuanto a lineamientos curriculares, definición de estándares, logros y evaluación del aprendizaje, con el fin de diseñar ambientes, de aprendizaje, propicios y pertinentes a las problemáticas escolares.
- Aprender a diseñar propuestas de enseñanza, guías de trabajo escolar y propuestas de investigación.

Metodología para hacer el análisis se consideran dos tipos de variables: Como variable independiente el ABP y la participación de los docentes y los futuros docentes. Como variables dependientes se observaron algunos resultados de la aplicación de las guías de aprendizaje. Aunque la experiencia tiene poco tiempo de aplicación, como grupo control se puede tomar un grupo que trabaja con métodos tradicionales y grupos de práctica profesional docente convencionales.

Se tomó como problema central la enseñanza- aprendizaje del álgebra y a partir de la observación de las clases, y el diálogo con estudiantes y docentes de varias instituciones educativas los estudiantes identificaron varios subproblemas, que se pueden clasificar en cuatro grupos: los que hacen referencia a contenidos declarativos y/o procedimentales (variables, constantes, aprender a factorizar, simplificar, reducir expresiones…); los que hacen referencia a métodos de enseñanza (los estudiantes encuestados manifiestan que no entienden las explicaciones del profesor, que les dejan mucha tarea, que no comprenden lo que deben hacer…), los que hacen referencia a la utilidad y/o transferencia de los conceptos (los estudiantes manifiestan no saber para qué y/o por qué aprender álgebra) y los que hacen referencia a la motivación y/o contenidos actitudinales (los estudiantes manifiestan que las clases son aburridas y/o los docentes manifiestan que los estudiantes no atienden en clase, que no trabajan, que no hacen tareas…). Una vez se identificaron los subproblemas, se procedió a estudiar la documentación, consultar experiencias exitosas y a diseñar tres guías de trabajo: una clase de enseñanza directa, una clase de recapitulación y una clase de profundización.



Aunque la idea de la experiencia es empezar a generar contenidos declarativos en lo que refiere principalmente al conocimiento didáctico del contenido por parte del profesor de matemáticas en un semestre apenas se alcanzan a delinear las etapas del proceso:

- Identificar la situación problemática
- Definir el problema
- Explorar el problema:
- Plantear la o las soluciones
- Llevar a cabo el plan
- Evaluar el proceso

Como el ABP se fundamenta principalmente en el constructivismo, la evaluación tiene en cuenta todo el proceso de construcción del conocimiento y no sólo el final. Esto nos debe permitir verificar que el estudiante ha aprendido a aprender.

Las propuestas de trabajo elaboradas por los estudiantes son muy llamativas, creativas y llenas de contenido.
Los aprendientes mejoran notoriamente en la comprensión de los temas y procesos trabajados.
Se generan clases dinámicas y participativas y se utilizan recursos y materiales didácticos ajustados a la competencia de los aprendientes.

Conclusiones

Es importante tener en cuenta que esta experiencia se encuentra en proceso de construcción, para lograr unos datos más confiables haría falta un periodo de tiempo mínimo de dos años y la posibilidad de hacer una observación continua del proceso.

Los resultados hasta ahora obtenidos nos sirven como base para planear el trabajo del próximo semestre en el cual se hará la implementación de las guías diseñadas por los estudiantes y la evaluación de la aplicación, allí surge el inconveniente natural en las instituciones educativas de nuestro medio y es que seguramente el 35% de los

estudiantes serán nuevos en el grupo y en otros casos habrá cambiado el docente.

Esta situación se convierte en una nueva variable que será objeto de evaluación.

Las experiencias consultadas y los resultados obtenidos tras la aplicación del método nos permiten prever que su aplicación conducirá a cambios importantes por lo menos en tres aspectos: el currículo, los maestros y los aprendientes. En cuanto al currículo, el ABP aumenta la importancia de los objetivos de aprendizaje, la integración del conocimiento y permite los procesos de investigación escolar.

Los maestros pueden ver como la motivación de los estudiantes y el interés por acceder a nuevos conocimientos aumenta; aunque las tareas son mucho más complejas, los resultados son más satisfactorios.

Finalmente, los aprendientes ven aumentada su responsabilidad, el rango de habilidades necesarias para el aprendizaje, la capacidad para resolver problemas y también su motivación y satisfacción.

En cuanto a la formación de los futuros docentes: el ABP se convierte en una herramienta fundamental para potenciar el conocimiento didáctico de los contenidos desde la práctica reflexiva, porque coloca al aprendiente en una situación activa de aprendizaje, permitiéndole decidir qué objetivos de aprendizaje va a cubrir en cada caso y cómo lo va a hacer.

Para el caso específico de la experiencia el uso de las nuevas tecnologías hace que la información adquiera dimensiones infinitas y que el acceso a ella sea cada vez más amplio, permitiendo el desarrollo de unos procesos de indagación para conocer acerca de un tema, la obligación del maestro es la de proveer las temáticas generales y los microdiseños de las asignaturas.

En cuanto a la evaluación: esta se toma como un proceso constructivo en el que participan tanto los aprendientes –de forma individual y en equipo-, como los docentes. Se convierte también en un proceso del aprendizaje, que conlleva el uso de la información de forma crítica. La evaluación no busca medir la capacidad de memorización: busca evaluar, en forma constante, la importancia del trabajo hecho y promover la adquisición de capacidades de evaluación crítica, de habilidades docentes y mejorar la capacidad parea identificar y resolver problemas de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Bolt, B. (1992). *101 Proyectos matemáticos*. Barcelona, España: Labor.

Manjarrés, M.E. y Mejía, M.R. (2009). *Caja de herramientas para maestros(as) ONDAS.* Bogotá, Colombia: Editorial Edeco.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Estándares básicos de calidad para el área de matemáticas.* http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm

Torres, J. A, Mora, L. C, Luque, C.J. factorización algebraica. *Memorias del XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*. Universidad Pedagógica Nacional. 177-185. Disponible en: http://xhuertas.blogspot.com/2008/08/abp-aprendizaje-basado-en-problemas.html

❖❖❖

Poliedros que vuelan

Roberto Antonio Salvador
Escuela Normal Superior Federal De Oaxaca.
roansa61@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo es el resultado de la experiencia que he tenido al trabajar de una forma dinámica y atractiva, algunos contenidos de geometría dentro de la materia de matemáticas, teniendo la intención y el objetivo de compartir con nuestros compañeros profesores esta fructífera actividad a través de un taller.

En concreto se trata de trabajar contenidos de geometría a nivel medio básico a partir de la elaboración de globos aerostáticos, estos globos aerostáticos son retomados de un juego tradicional que se realiza en la región de los Tuxtlas, Veracruz, México.

Los globos se elaboran con papel de china y las piezas que se trazan y cortan tiene la forma de figuras geométricas, es ahí donde inicia el trabajo con los contenidos de geometría, porque los alumnos tienen que trazar, medir, calcular, estimar, verificar, etc., para poder obtener la figura básica del trabajo, que es un triángulo isósceles, el cual, después de recortarlo se reafirman los conceptos de perímetro y área de triángulos, pudiendo incluirse aquí, algo sobre el contenido del Teorema de Pitágoras, ya que al alumno solo se le da la medida de la base y la altura del triángulo y para obtener el perímetro se requiere de la medida de los lados.

Después de recortar los triángulos, se unen cinco de ellos para formar una pirámide pentagonal, rescatando con este paso lo referente a las características de una pirámide, clasificación de las pirámides, perímetro y área de la base de la pirámide, así como volumen de la misma.

La pirámide es la pieza para construir un globo aerostático de doce picos, popularmente en la región de donde tomamos la actividad, les llaman ILAMAS, por su gran parecido a una fruta típica de la región. Ya con el globo construido se pueden tratar los contenidos sobre los POLIEDROS, considerando que estas pirámides pentagonales al unirse forman un POLIEDRO REGULAR NO CONVEXO, denominado también PEQUEÑO DODECAEDRO ESTRELLADO.

Muy aparte de los contenidos de matemáticas (Aritmética, Geometría, Álgebra) se pueden tratar contenidos de otras materias, tales como FÍSICA (razones por las que el globo vuela); EDUCACIÓN ARTÍSTICA (elaboración de un trabajo manual); ESPAÑOL (redacción de un instructivo); QUÍMICA (composición y clasificación de los materiales utilizados); EDUCACIÓN CÍVICA (trabajo colaborativo en el aula); y otros contenidos de las mismas materias y de otras, según la necesidad e ingenio del profesor de matemáticas.

Esperando que este trabajo sea de su interés porque lo maravilloso de esto es ver en el aire a un POLIEDRO VOLANDO, quedo a sus órdenes MTRO. ROBERTO ANTONIO SALVADOR.

Referencias

Schmelkes, S. (2004). *La formación de valores en la educación básica.* Distrito Federal, México: Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal.

Sierra, D. y Guédez, C. (2006). *Juega y aprende a calcular. Venezuela:* Fe y alegría.

Fuenlabrada, I. y otros. (1994). *Juega y aprende Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.

Tirapegui, C. (2004). *El juego y la Enseñanza de la Matemáticas*. Venezuela: Material mimeografiado.

❖❖❖

PÓSTERES

Mosaicos con Geogebra, una manera didáctica de introducir el concepto de isometrías

Daysi Julissa García Cuéllar
Colegio Sagrado Corazón – Sophianum-Perú
daysigarcu@gmail.com

Daniel Giovanni Proleón Patricio
Colegio Sagrado Corazón – Sophianum-Perú
dproleon@gmail.com

Resumen

Las nuevas tecnologias de la información y comunicación ofrecen un medio para que los estudiantes exploren, conjeturen, redescubran, construyan nuevos conocimientos y desarrollen habilidades tanto matemáticas como digitales. Los programas de geometría dinámica se han convertido en uno de los recursos informáticos que mejor permiten la interactividad del alumno con las ideas matemáticas. Geogebra es un software de geometría dinámica que es de fácil uso y de carácter abierto, es por eso que es una herramienta poderosa en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la geometría. La experiencia de mosaicos con geogebra fue realizada con las alumnas del segundo grado de educación secundaria del colegio Sagrado Corazón – Sophianum. Se realizó en tres fases, la primera de intrumentalización ya que las alumnas no sabián utilizar el software; la segunda, la de descubrimiento de las propiedades de las isometrías (simetría axial y puntual, rotación y traslación) con el uso de Geogebra; y la tercera, de aplicación de las propiedades de las isometrias por medio de la construcción de mosaicos. Los objetivos de la experiencia son: utilizar el software GeoGebra para la generación de conjeturas referidas a los conceptos de isometrías, que las alumnas descubran que dentro de un mosaico existen diferentes isometrías e introducir en el aula de matemática un software de geometría dinámica. La aplicación de la experiencia resultó valiosa porque se logró que las

alumnas reconozcan las propiedades y elementos de cada una de las isometrías y utilizaron su pensamiento geométrico de manera creativa en la construcción de los mosaicos con la ayuda del Geogebra.

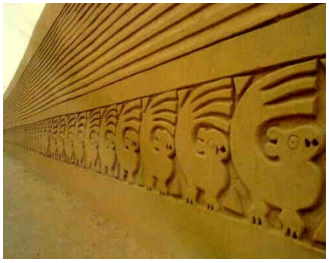
Palabras clave: Software libre, geometría dinámica, geogebra, mosaicos, descubrimiento guiado.

Introducción

Los mosaicos son conocidos desde los tiempos antiguos. Estuvieron presentes en las civilizaciones asiria, babilónica, persa, egipcia, griega, china, andina y otras.







Un mosaico es un conjunto de figuras geométricas y polígonas dispuestas de forma tal que no se sobreponen unas a otras ni quedan separaciones entre ellas. Los Mosaicos se pueden construir utilizando las isometrías

que son transformaciones en el plano que no modifican ni la forma ni el tamaño de las figuras geométricas. Entre ellas está la Traslación, el Giro o rotación, la Simetría axial y central.

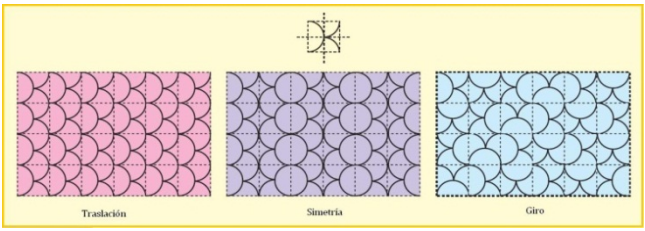


Figura N° 1: Muestra del uso de las isometrías en la construcción de mosaicos.

Objetivos

- Utilizar el software GeoGebra para el estudio de traslaciones, giros y simetrías en el plano.
- Analizar las relaciones y propiedades de las isometrías mediante el uso de GeoGebra.
- Elaborar mosaicos por medio de GeoGebra, identificando las isometrías que contiene.

Metodología

Las sesiones se llevaron a cabo en la sala de informatica, las computadoras tenían instalado el GeoGebra para la realización de las siguientes actividades:

Actividad n° 1:

Esta orientada al reconocimiento de las herramientas del GeoGebra para su posterior utilización en las isometrías

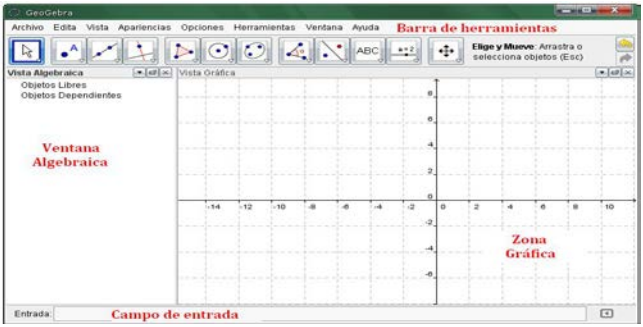


Figura N° 2: Pantalla de presentación de GeoGebra.

Actividad n° 2:

Destinada a reconocer las relaciones y propiedades de las isometrías.

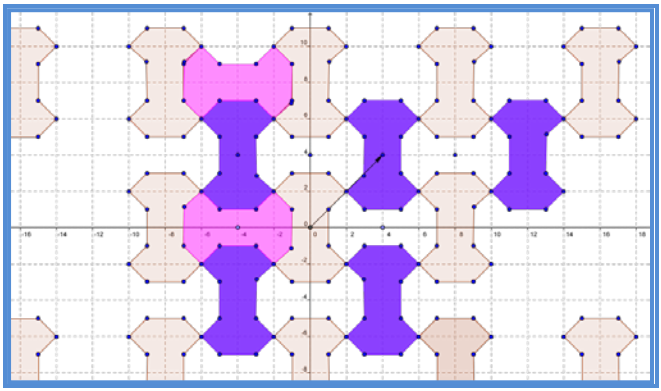


Figura N° 3

Actividad n° 3:

Se da enfasis a la creación de Mosaicos utilizando las isometrías necesarias para su realización.

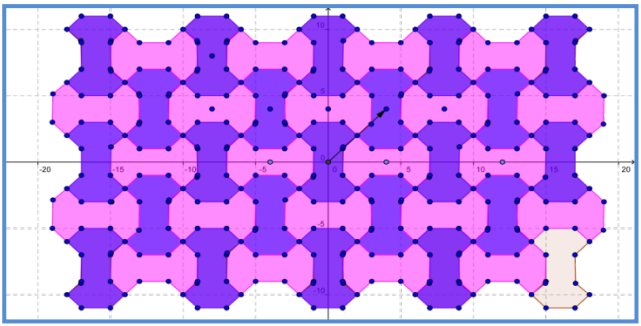


Figura N° 4: Construcción del Mosaico Hueso

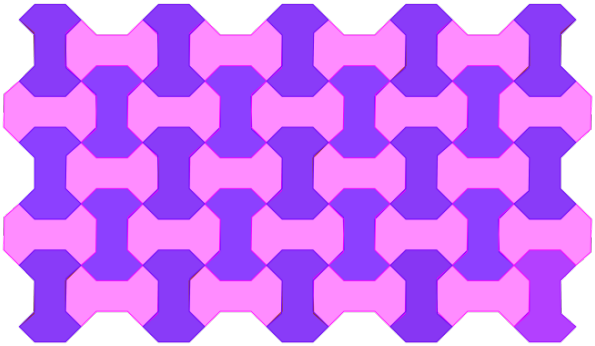


Figura N° 5: Mosaico Hueso

Conclusiones

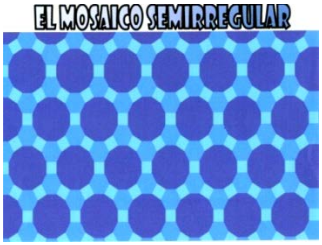
- Se observó que con el uso del GeoGebra, motivó a las alumnas hacia el aprendizaje de las isometrías.
- Las alumnas lograron reconocer las propiedades y elementos de cada una de las isometrías.
- Con la creación de mosaicos se logro aplicar los conocimientos sobre Isometrías de una manera más significativa y amena.

Anexos

Mosaicos realizados por las estudiantes del segundo grado de educación secundaria.









Referencias

Sadovsky, P (2005), Enseñar Matemática Hoy: Miradas, Sentidos y Desafíos. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cabrerizo, J., Catillo, S. y Rubio, M. (2007). Mosaicos. Madrid, Ed. Pearson educación

Jahn, A. & Gomes, N. (2010). Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores. Rio de Janeiro Ed. SBEM.

Costa, J. & Lopes de Araújo, L. (2010). Aprendendo matemática com o Geogebra. São Paulo. Editora exacto.

Wagner, E. (2005). Construções geométricas. Rio de Janeiro Ed. SBEM.

Lima, E (1996). Isometrías. Rio de Janeiro Ed. SBEM.

❖❖❖

Webquest como recurso de la enseñanza de la Matemática en los primeros ciclos de los cursos de ingeniería

Daniel Giovanni Proleón Patricio
Universidad San Ignacio de Loyola - Perú
dproleon@gmail.com

Daysi Julissa García Cuéllar
Universidad San Ignacio de Loyola - Perú
daysigarcu@gmail.com

Resumen

La experiencia fue realizada a los estudiantes de matemática de los primeros ciclos de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola – USIL. Para eso, utilizamos la herramienta de google Apps (google site y google docs) que nos sirvió para realizar las webquests de forma rápida y tener un mayor acceso por parte de los estudiantes. Las *WebQuests* realizadas durante todo el ciclo tuvieron la finalidad de motivar a los estudiantes a la investigación en el área de matemática, reforzar sus conocimientos matemáticos, aplicar la matemática en situaciones reales, desarrollar el trabajo colaborativo y la competencia digital de los estudiantes, introducir las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Entre las W*ebQuests* realizadas, presentamos: latas de aluminio: un problema ambiental, la cicloide, exploración espacial. Consideramos esta experiencia valiosa porque se desarrolló en el estudiante una mayor implicación en su proceso de enseñanza y de aprendizaje en el área de matemática, fomentó su trabajo autónomio y colaborativo. Así mismo, en el ámbito de las competencias se desarrollarón la capacidad para el análisis de la información, habilidades interpersonales, la aplicación de su conocimiento a situaciones reales, destrezas en el manejo de la información, competencias para el trabajo autónomo, habilidades para la investigación y competencias digitales.

Palabras clave: Matemática, *WebQuest*, trabajo colaborativo, competencia digital, enseñanza superior.

Introducción

Las *WebQuest* surgieron en el campo educativo a partir de las ideas de aprendizaje colaborativo y de procesos de investigación para la construcción del saber. Fueron creadas en 1995, por Bernie Dodge, en la universidad de San Diego, tomando como principio básico llevar a los estudiantes a iniciarse en la investigación utilizando recursos de internet para resolver un problema significativo o para la reflexión y debate sobre un tema o situación social de interés de los estudiantes.

Dodge (1995), definió *WebQuest* como un modelo para el aprendizaje basado en proyectos, la propuesta es que los estudiantes realicen una investigación orientada con tareas atrayentes, que sean ejecutables y para las cuales son predefinidos recursos de la web, de forma que el aprendizaje ocurra, según el autor, por la construcción de conocimientos en un proceso crítico de pensamiento.

La palabra *WebQuest* fue acuñada a partir de la fusión de Web – de la red World Wide Web, que normalmente constituye la base principal de datos para los aprendizajes; Quest, que significa búsqueda porque en el caso de la *WebQuest* esa es la principal actividad de los estudiantes.

La estructura básica de la *WebQuest* contempla las siguientes secciones:

1) *Introducción*, que presenta el contenido y propone una pregunta central.
2) *Tarea*, con la propuesta de trabajo y el producto esperado.
3) *Proceso*, que contiene la descripción de las etapas para la elaboración del producto a ser presentado y compartido por los estudiantes.

4) *Recursos*, en el cual se encuentran disponibles los diversos documentos en formato digital para los estudiantes, tales como textos, videos; la bibliografía de apoyo con la indicación de los site a ser consultados y demás recursos a ser captados en la web.
5) *Evaluación*, que establece los criterios de los productos y de la actuación de los estudiantes.
6) *Conclusión*, resume el propósito de la investigación realizada sobre la óptica de sus creadores.

Objetivos

- Motivar a los estudiantes a la investigación en el área de matemática
- Reforzar sus conocimientos matemáticos
- Aplicar la matemática en situaciones reales
- Desarrollar el trabajo colaborativo y la competencia digital de los estudiantes
- Introducir las tecnologías de la información y comunicación (TIC) en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
- Desarrollar el aprendizaje autónomo de los estudiantes

Metodología

Las *WebQuest* se realizaron durante todo el ciclo en el curso de análisis matemático para los alumnos del primer ciclo de ingeniería de la Universidad San Ignacio de Loyola. Para su realización se tuvieron en cuenta las secciones que debe contar toda *WebQuest.* A continuación describiremos la webquest titulada "Latas de aluminio, un problema ambiental" como ejemplo del trabajo realizado:

Página de inicio

Muestra una imagen motivadora para la realización del trabajo y la importancia de la responsabilidad social.

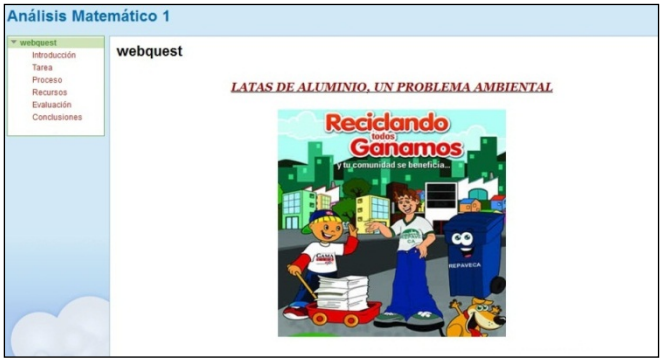


Figura N° 1

Introducción

En esta sección se presenta al estudiante la importancia de la preservación del medio ambiente y como la matemática ayuda a tal fin.



Figura N° 2

Tarea

En esta página se muestra las actividades a realizar por los estudiantes. La tarea se subdivide en tres actividades; en la primera los estudiantes deben de utilizar sus conocimientos de derivadas para optimizar la cantidad de aluminio usado para la construcción de la lata de gaseosa y verificar su resultado obtenido por medio de GeoGebra; en la segunda, esta destinada a la elaboración de

diagramas que expliquen el proceso de la elaboración de la lata de gaseosa y la tercera, esta orientada hacia el juicio crítico de los estudiantes sobre la producción responsable y la responsabilidad social.

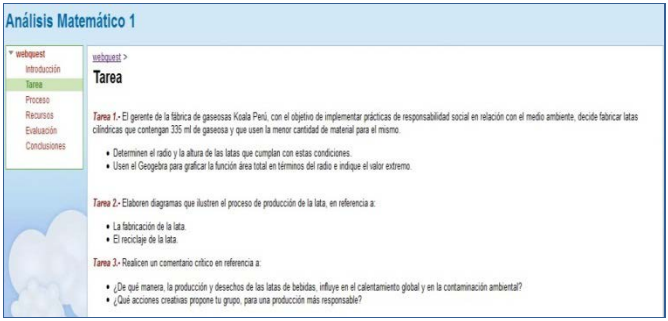

Análisis Matemático 1
webquest
Introducción
Tarea
Proceso
Recursos
Evaluación
Conclusiones
webquest >
Tarea
Tarea 1.- El gerente de la fábrica de gaseosas Koala Perú, con el objetivo de implementar prácticas de responsabilidad social en relación con el medio ambiente, decide fabricar latas cilíndricas que contengan 335 ml de gaseosa y que usen la menor cantidad de material para el mismo.
• Determinen el radio y la altura de las latas que cumplan con estas condiciones.
• Usen el Geogebra para graficar la función área total en términos del radio e indique el valor extremo.
Tarea 2.- Elaboren diagramas que ilustren el proceso de producción de la lata, en referencia a:
• La fabricación de la lata.
• El reciclaje de la lata.
Tarea 3.- Realicen un comentario crítico en referencia a:
• ¿De qué manera, la producción y desechos de las latas de bebidas, influye en el calentamiento global y en la contaminación ambiental?
• ¿Qué acciones creativas propone tu grupo, para una producción más responsable?

Figura N° 3

Proceso

En esta sección se dan las pautas para la realización de las tareas encomendadas a los estudiantes.


Análisis Matemático 1
webquest
Introducción
Tarea
Proceso
Recursos
Evaluación
Conclusiones
Créditos
webquest >
Proceso
• Formen grupos de 4 estudiantes.
• La Tarea 1 deberá resolverse usando el cálculo diferencial.
• La Tarea 2 deberá resolverse analizando los videos y el ejemplo de diagrama mostrado en Recursos.
• La Tarea 3 debera resolverse despues de que todos los integrantes del grupo han llegado a un concenso en su respuesta crítica y creativa.
• Deberan elaborar la Webquest en un archivo word y subirla a la plataforma moodle del curso

Figura N° 4

Recursos

Contiene los enlaces que se brindan a los estudiantes para la realización de las tareas a realizar.



Figura N° 5

Evaluación

Se dan a conocer los criterios a ser evaluados por el docente.

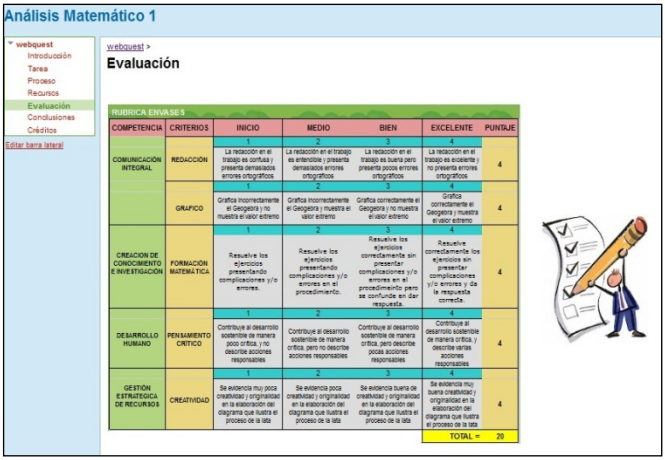


Figura N° 6

Conclusión

Muestra la justificación para la creación de la *WebQuest*

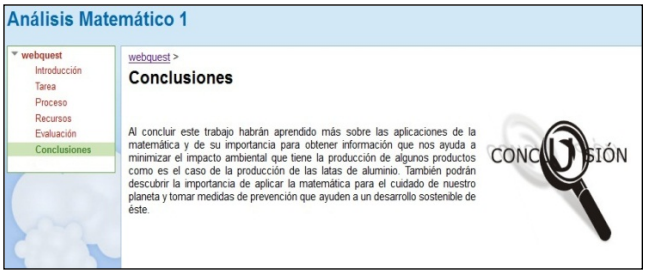

Análisis Matemático 1
webquest
Introducción
Tarea
Proceso
Recursos
Evaluación
Conclusiones
webquest >
Conclusiones
Al concluir este trabajo habrán aprendido más sobre las aplicaciones de la matemática y de su importancia para obtener información que nos ayuda a minimizar el impacto ambiental que tiene la producción de algunos productos como es el caso de la producción de las latas de aluminio. También podrán descubrir la importancia de aplicar la matemática para el cuidado de nuestro planeta y tomar medidas de prevención que ayuden a un desarrollo sostenible de éste.

Figura N° 7

Conclusiones

- La realización de las WebQuests permitió que los estudiantes aplicarán sus conocimientos matemáticos en problemas de contexto real.
- Se pudo observar que los estudiantes, se mostraban interesados en la realización de la WebQuest y cómo la matemática puede ser utilizada para dar solución a diversos problemas.
- En las diversas WebQuests se incorporaron herrmamientas TICs tales como: GeoGebra, Wiris, WinPlot, Excel que aportaron al desarrollo de la competencia digital de los estudiantes.
- Los estudiantes desarrollaron sus habilidades interpersonales lo cual ayudo a la realización de las webquets de una manera colaborativa fomentando la investigación y el trabajo en equipo.
- Las WebQuests contribuyeron al desarrollo de destrezas en el manejo de la información que se encuentra en la red y la importancia de reconocer información confiable.

Referencias

Adell, J. (2007). Internet en el aula: las Web Quest. En J. Cabero y J. Barroso (Eds.). *Posibilidades de la teleformación en el Espacio Europeo de Educación Superior* (EEES) Granada: Editorial Octaedro Andalucía. p. 211-225.

Almeida, M. (2010). *Tecnologias informáticas, salas de aula e aprendizagens matemáticas*. Rio de Janeiro. Editora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. 134 p.

Coll, C. & Monereo. (2008). *Psicología de la educación virtual*. Madrid: Morata.

Dodge, Bernie (1999). Tareonomía del WebQuest: Una taxonomía de tareas. Recuperado el 7 de enero de 2011, de: http://www.eduteka.org/Tema11.php.

Dodge, Bernie (1999). Cinco reglas para escribir una fabulosa WebQuest. Recuperado el 7 de enero de 2011, de: http://www.eduteka.org/Profesor10.php

Jahn, A. & Gomes, N. (2010). Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores. Rio de Janeiro. Ed. SBEM, v. Cap. 3, p. 63-81.

❖❖❖

Configuraciones geométricas en hojas de plantas

Elsa Cárdenas Catalán
Institución Educativa "Santa Rosa" De Abancay – Apurimac, Perú
elsacar22@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo es una experiencia en la enseñanza de la matemática en el 4to. Grado de Educación secundaria. Se menciona los objetivos, contenidos conceptuales actitudes. Asimismo se desarrollará el marco teórico y metodología, los resultados de la experiencia, las concluciones a las cuales se llegaron y por último algunos ejemplos gráficos.

Palabras clave: "Hay que tener ojos para ver, conocimientos para comprender y espíritu para admirar"

Objetivos:

Relacionar elementos geométricos obtenidos en la geometrizacón en hojas de plantas a través de construcciones y medidas.

Utilizar herramientas de dibujo y medida (manuales), para hacer representaciones gráficas construir objetos geometricos.

Contenidos conceptuales: Proporcionalidad, Semejanza, Congruencia. Relaciones métricas.
Actitudes: Sensibilidad a la presición en la representación de objetos o figuras reales de su entorno.

Marco Teórico y metodología en la que se basa el trabajo.

El estudio de la geometría es una actividad fundamental dentro del que hacer tanto del estudiante de antaño como del estudiante actual de uno u otro contexto, y sus

rudimentos forman parte de todas las ideas comunes a todos los sistemas educativos por que no decirlo del mundo.

El aprendizaje de la geometría a través de las ***configuraciones geometricas en hojas de plantas*** se debe valorar como una fuente de intuiciones, pues permite una serie de aproximaciones a través de demostraciones no formales, como dibujos o construccione con lápiz, escuadra, compás escalímetro (elaborado por los alumnos), lo que constituye un punto de partida hacia las demostraciones más formales. Las representaciones gráficas hacen comprencibles las ideas que se quieren expresar y sustentar, suelen ser muchas veces convincentes en las explicaciones de contenidos geometricos.

Cabe resaltar lo recogido de internet sobre la Ciencia Cognitiva de las Matemáticas. Lakooff y Nuñez (2000) sostienen que para llegar al pensamiento abstracto, necesitamos usar esquemas más básicos que se derivan de la experiencia muy inmediata a nuestros cuerpos. Usamos estos esquemas básicos básicos, llamados *esquemas de imágenes*, para dar sentido, a través de *proyecciones metafóricas*, a nuestras experiencias en dominios abstractos.

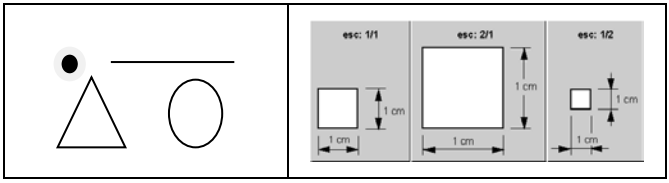
En el texto de Metodología dice "la observación es una de las habilidades más importantes en el desarrollo del pensamiento y la actitud científica", "es el acto de advertir o estudiar algo con atención" (pg.29). En la Geometrizaciónde hojas de plantas se pone de manifiesto la habilidad de observar que permite analizar la composición geométrica del elemento estudiado. El término geometrizar es de uso muy particular, se refiere a la acción de ordenar con bases matemáticas las formas de un espacio, es decir la acción de geometrizar consiste en buscar elementos geometricos que componen una forma en este caso el de la hoja de una planta. Al geometrizar obtenemos configuraciones geométricas que vendria a ser

el análisis cognositivo mediante la interrelación, composición, secuencia de elementos geométricos.

En el manual, Arte de proyectar en arquitectura, dice: "La actividad del ojo puede dividirse en mirar y observar. El mirar sirve en primer lugar para nuestra seguridad corporal, la observación empieza allí donde concluye el mirar; el mirar conduce a disfrutar de las "imágenes" descubiertas por la mirada" (pg. 32). Al obtener *configuraciones geométricas en hojas de plantas* pudimos establecer valores estéticos como la unidad, repetición, ritmo, movimiento, direccionalidad, equilibrio orden, simetría, jerarquía, masividad, proporción. Lo que nos conlleva a valorar y disfrutar de nuestra naturaleza.

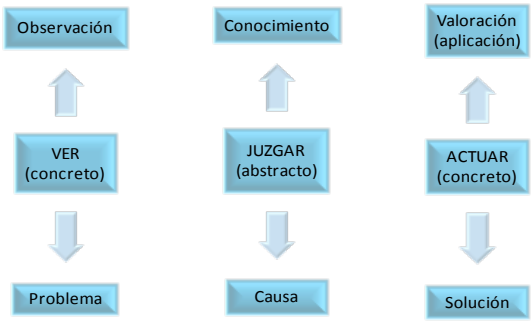
En el manual, Arte de proyectar en arquitectura, dice: "Jhon de D. Barrow, en su libro ¿Por qué el mundo es matemático? (Barcelona 1997) explica "uno de los más grandes misterios del universo": la sorprendente interrelación que existe entre los objetos del mundo real y las relaciones abstractas, las geométricas y los números del mundo matemático". Lo que dice Jhon de D. Barrow, lo comprobamos por ejemplo en una piedra del mundo real, lo idealizamos y obtenemos el volumen una esfera, su sección nos muestra un círculo y su contorno una circunferenia y en ellas podemos estudiar geometricamente sus elementos.

Los elementos geometricos que utilizamos en el presente trabajo para obtener configuraciones geométricas en hojas de plantas son los puntos, líneas, ángulos, poligonos, circulos.



Hacemos uso también de la escala para la medición y representación. En el manual, Arte de proyectar en arquitectura, dice: La escala es la proporción de aumento o disminución que existe entre las dimensiones reales y las dimensiones representadas de un objeto.

La metodología en la que se basa nuestro trabajo es Holistica, pues tomamos en consideración el Método Inductivo, Deductivo, Experimental y lo resumido por el siguiente esquema.



Esquema 1: Metodología de trabajo en aula en el área de matemática

Elaboración: Propia

Es así que con las alumnas de la I.E. "SANTA ROSA" concluímos que: Al geometrizar las hojas de plantas podemos observar y establecer relaciones de elementos geométricos, podemos observar rectas paralelas, perpendiculares, ángulos, poligonos, circunferencias, círculos y a su vez estos inscritos, circunscritos y una gama de composiciones que dan forma, tamaño y posición de la hojas mostrando su belleza y armonía. La actividad de geometrizar permite comprender mejor temas como Proporcionalidad, Semejanza, Congruencia. Relaciones métricas.

En el manual, Arte de proyectar en arquitectura mencional a Confucio quien expreso este pensamiento ya hace más de 2500 años con las siguientes palabras: "¡A mi alumno le doy una esquina, pero las otras tres las ha de encontrar el mismo!".A ello le sumo lo que Madre Amabilis Geimer (ex directora de nuestra I.E.) decía algo asi: "a las alumnas no debemos ahorrarle tiempo y trabajo en su que hacer de aprendizaje …" y yo le añado: que los alumnos se sorprendan cuando descubran todas las habilidades que hay en ellos, y estudiar matemática será divertido y productivo, por que no sólo notaran un desarrollo matemático sino un desarrollo personal.

Resultados.

Alumnas motivadas en la observación, representación, análisis y capaces de emitir congeturas e iniciarse en modelamientos matemáticos.

La acción de geometrizar permite conocer y explorar características y propiedades de las figuras estudiadas, analizar situaciones y hacer generalizaciones. Y también para desarrollar la imaginación y en suma para desarrollar la inteligencia lógico matemático. Para lograr afianzamiento del aprendizaje de la geometría.

Conclusiones.

Las configuraciones geometricas en hojas se conviertan en un instrumento que facilitán el análisis de las figuras geométricas; su utilización permite visualizar regularidades y analizar bajo que condiciones se presentan tal o cual regularida para luego modelarlos y concluir en generalizaciones o verificar y aplicar diversas propiedades o teoremas geométricos.

Desarrollo de algunos ejemplos:

Existen numerosas hojas que estan perfectamente encerradas dentro de figuras poligonales, por ejemplo la

hoja de la granadilla tiene la forma de triángulo; la hoja de la higuera tiene la forma de un pentágono.

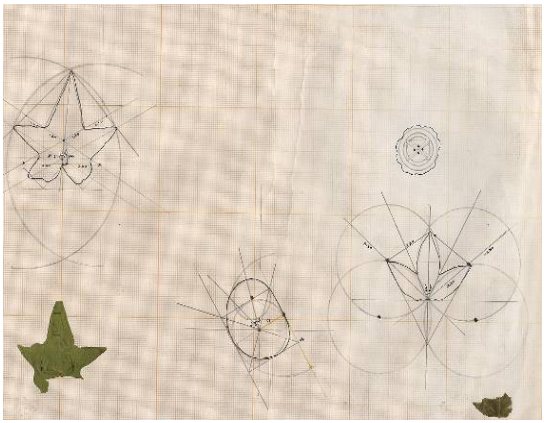


Fig.1



Fig. 2

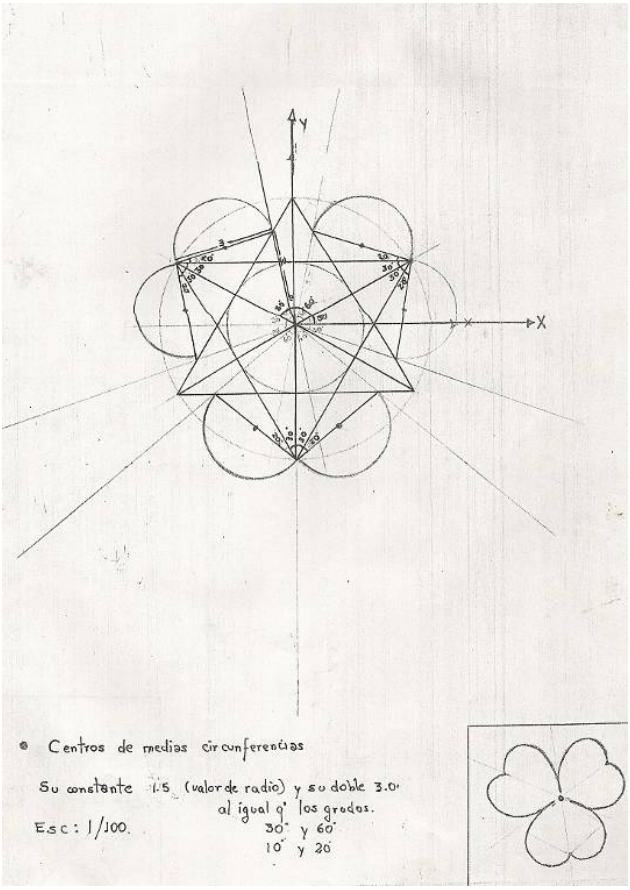

Y
X
Centros de medias circunferencias
Su constante 1.5 (valor de radio) y su doble 3.0
al igual q' los grados.
Esc: 1/100.
30° y 60°
10° y 20°

Fig. 3

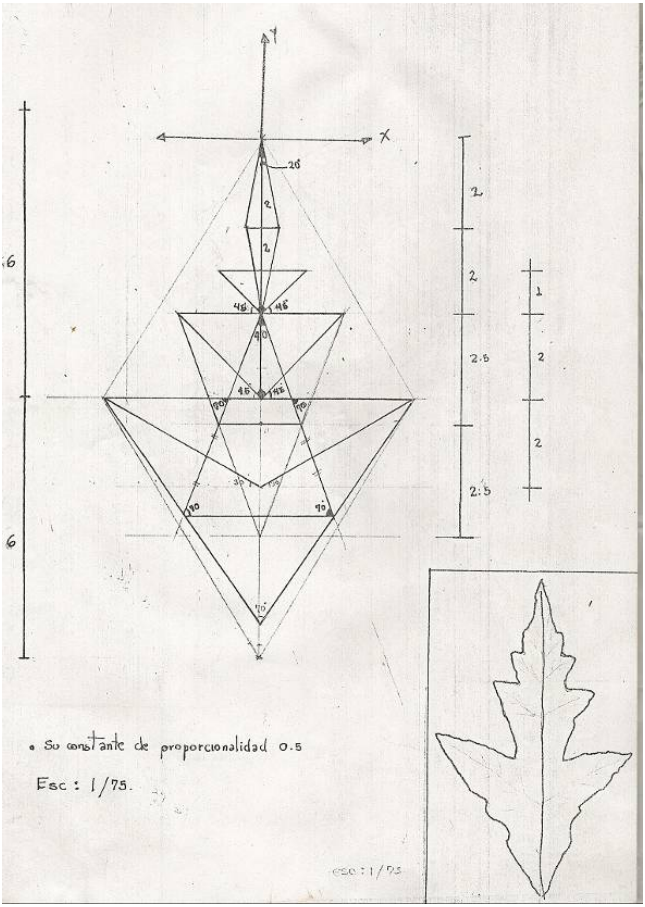

Y
X
2θ
2
2
2
2
2.5
2
2
2.5
1
2
2
6
6
45°
45°
90°
45°
45°
70°
70°
35°
70°
70°
70°
• Su constante de proporcionalidad 0.5
Esc : 1/75.

Fig. 4

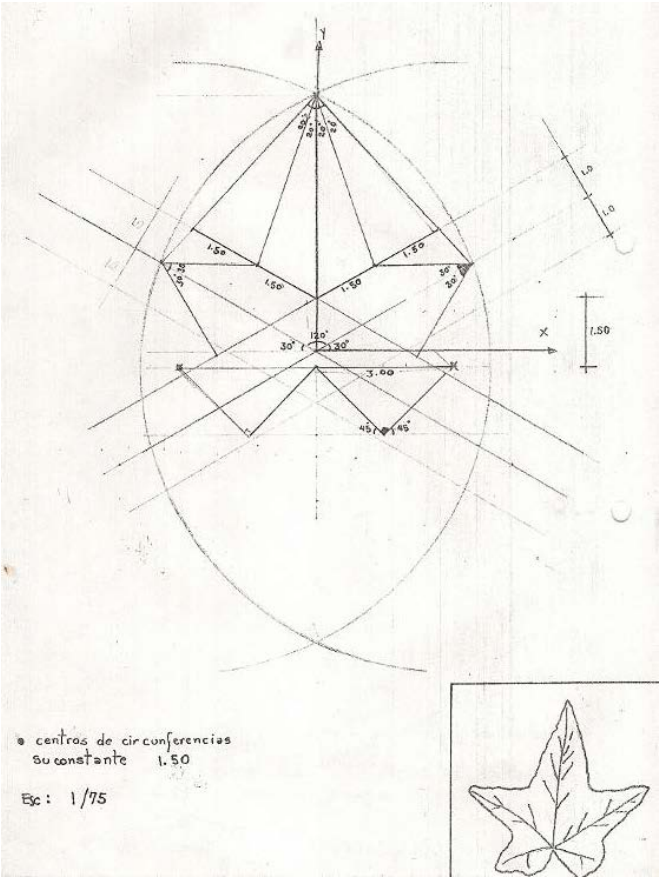

Y
X
1.50
1.50
1.50
1.50
1.50
3.00
120°
30°
30°
45°
45°
centros de circunferencias
su constante 1.50
Esc: 1/75

Fig. 5

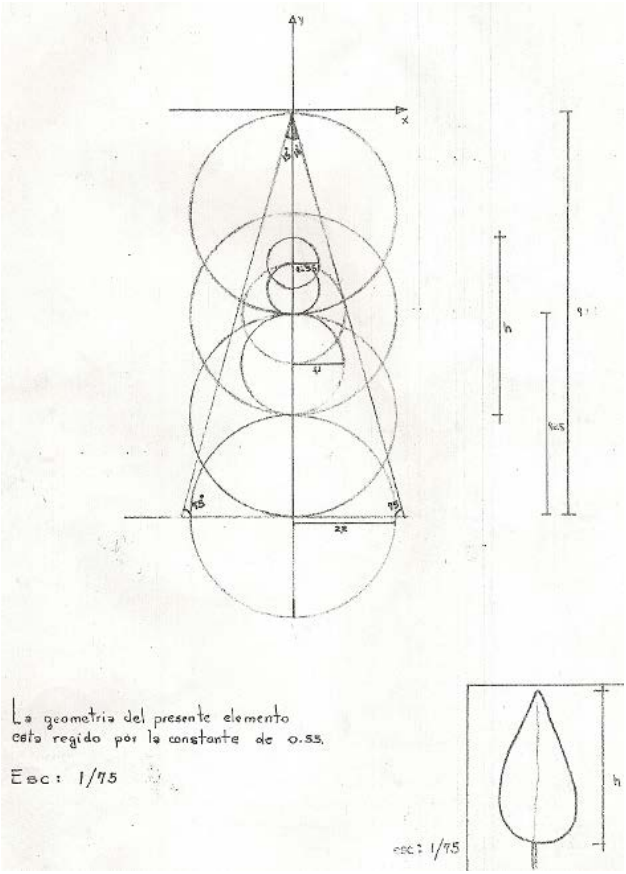


Fig. 6

Referencias

Peter Neufert y Planungs- AGNeufert Mittman Graf. (1997). Arte de proyectar en arquitectura. Ediciones G. Gill, S.A. de CV México, Naucalpan53050 Valle de Bravo.14° edición. 2° Tirada 1999.

Sigfredo Chiroque, Sergio Rodriguez. Metodología.Ministerio de Educación. Bachillerato Peruano.Ediciones Quipu E.R.L.

De donde las matemáticas vienen: Cómo la mente incorporada trae matemáticas en ser. Recuperado de http://www.multilingualarchive.com/ma/enwiki/es/Where_Mathematics_Comes_From el 1 de enero de 2012.

❖❖❖

Modelación mediante Excel y Fwin32: funciones polinómicas de grado 1-2-3

Enrique Huapaya Gómez
Institución Educativa "Scipión Llona" – Lima, Perú
ehuapaya@pucp.edu.pe

Resumen

El presente Poster, expone una propuesta didáctica dirigida a docentes de educación secundaria. Está compuesta por tres sesiones de aprendizaje que involucran actividades de modelación a partir de situaciones contextualizadas, el objeto matemático de estudio son las Funciones Polinómicas de primer, segundo y tercer grado, estas sesiones cuentan con el apoyo de dos recursos tecnológicos también denominados objetos de aprendizaje: la Hoja de Cálculo EXCEL y el graficador FWIN32.

El objetivo es aprovechar pedagógicamente estos recursos, uno de ellos poco utilizado en la enseñanza de la matemática como es el EXCEL, pues por sus características permite introducir a nivel intuitivo primero y formal después conceptos matemáticos en los estudiantes, en particular el objeto función polinómica. El FWIN32, permite complementar el trabajo didáctico realizado con la hoja de cálculo.

El marco teórico que sustenta el uso de la tecnología para la enseñanza del concepto de función está basado en la Teoría de los Registros de Representaciones Semióticas, la cual es desarrollada por Raymond Duval (1993).

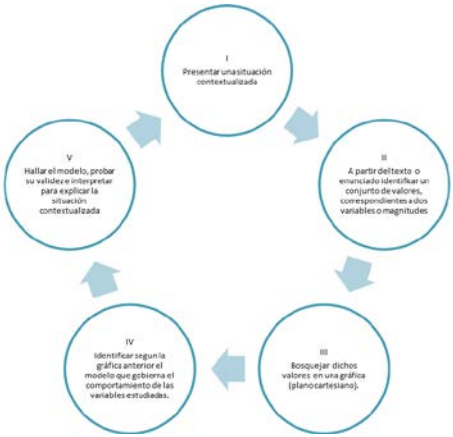
A partir de esta experiencia, podemos afirmar que el docente debe diseñar sesiones didácticas en las que el estudiante asocie a un objeto matemático dos o más representantes, esto será de gran ayuda para la comprensión conceptual del objeto matemático a aprender.

Palabras clave: Modelación, Funciones, Representaciones Semióticas, Tecnología.

Introducción

Este investigador señala que un objeto matemático puede ser asociado a una o más representaciones. La aprehensión conceptual no puede darse sin algún representante de dicho concepto, por ello, el estudiante debe realizar actividades de transformación y coordinación entre sus representaciones semióticas.
Esto implica el tránsito entre registros representacionales de este concepto, apoyados por el EXCEL (FWIN32), ya que podemos presentar un enunciado o situación (en registro o lenguaje natural), ingresar un conjunto de valores (registro numérico), usar el comando correspondiente para insertar la gráfica de ese conjunto de datos (cambio a registro gráfico), luego mediante los comandos respectivos insertar la tendencia y ecuación de regresión (cambio a registro algebraico). Las sesiones de aprendizaje han sido estructuradas en actividades y tareas de acuerdo a:

Esquema 01


I
Presentar una situación contextualizada
II
A partir del texto o enunciado identificar un conjunto de valores, correspondientes a dos variables o magnitudes
III
Bosquejar dichos valores en una gráfica (plano cartesiano).
IV
Identificar según la gráfica anterior el modelo que gobierna el comportamiento de las variables estudiadas.
V
Hallar el modelo, probar su validez e interpretar para explicar la situación contextualizada

El trabajo propone:
Modelación de situaciones que involucran funciones lineales, cuadráticas y cúbicas usando EXCEL y FWIN32:

"El problema del catálogo"

En una conocida tienda comercial por departamentos se ofertan mediante un catalogo los IPAD.
¿Habrá una relación entre el espacio de memoria y su costo?
¿El precio depende del espacio de memoria o el espacio de memoria depende del precio?



Ilustración 1

¿Cuál sería la variable independiente y la variable dependiente?
¿Que unidades se están empleando?
¿Qué valores recorre las variables GB y $?
¿Cuál sería el precio para un IPAD de 48 GB?
¿Cuál sería la capacidad de memoria de un IPAD cuyo costo es $3291?

Solución:

Los estudiantes trabajan en parejas y mediante una actividad estructurada se pide que:

a) Registren la información en una planilla EXCEL.
b) Inserten la gráfica.
c) Mediante los comandos inserten la ecuación de línea de tendencia asi como el coeficiente de regresión.
d) Identificar que clase de función se ha hallado.

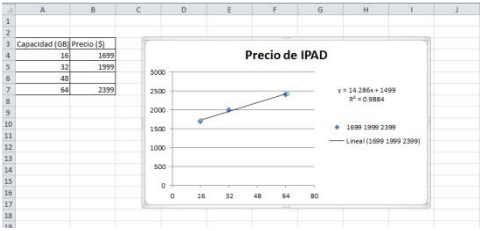


Ilustración 2

Se observa que el objeto de aprendizaje (HOJA DE CÁLCULO EXCEL), fue de gran ayuda para relacionar las variables estudiadas.

"El problema de las Redes Sociales".

La interacción entre personas produce efectos nuevos. Las interacciones humanas van mucho más allá de sus condicionantes biológicas. Podemos apreciarlas en los equipos de trabajo, en el apoyo mutuo de las familias, en las redes de asistencia social, en el desarrollo de los mercados, en las acciones de solidaridad, en los juegos deportivos, etc.

En todos estos casos, mientras más personas participan, mayor es la variedad de contribuciones específicas que pueden hacer, por lo tanto, de valor social.

Para ilustrar esto, veamos el caso de las telecomunicaciones (ya sea telefonía, internet u otros medios).



Ilustración 3

¿Si dos personas se relacionan, cuantos vínculos se establecen?
¿Para tres personas cuantos vínculos pueden darse?
¿Encuentra una relación que permita determinar el número de vínculos a establecerse a partir del número de personas involucradas (Red Social)?
¿Cuántos vínculos se establecen cuando la red esta conformada por 15 personas?
¿Si hay 595 vínculos cuantas personas conforman la Red?
Solución: Trabajando colaborativamente

a) Hacen uso del FWIN32, para registrar los datos en la Hoja de Cálculo.
b) Determina la ecuación de regresión correspondiente.

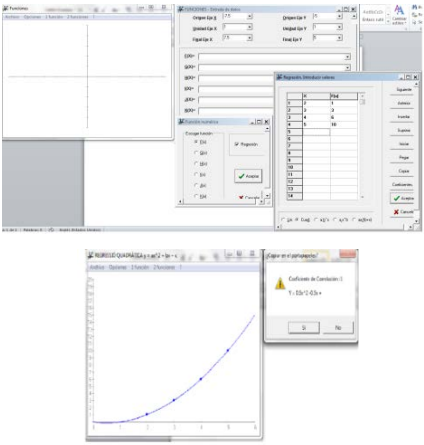


Ilustración 4

El graficador FWIN32 brinda otras posibilidades como por ejemplo encontrar el máximo o mínimo, visualizar el dominio y rango de la función, los cuales pueden ser aprovechados por el docente para mejorar la comprensión de la función cuadrática.

"Problema de optimización del volumen de un recipiente":

La promoción del 5to año decide vender bombones para recaudar fondos. Una de las tareas es diseñar las cajas para dichos bombones. Se dispone láminas de cartón cuadrada de longitud 9cm. ¿Cómo construir la caja de modo que contenga volumen máximo?.
¿Cuál es la longitud de la altura de la caja?
¿Cuál será el valor del volumen contenido?

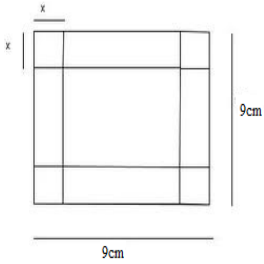


Ilustración 5

Solución:
En equipos discuten y diseñan la caja, se debe cortar en las esquinas cuadrados de longitud x, luego la base del cuadrado tendría longitud 9-2x, la altura de la caja sería x. Por tanto el volumen es: $V = (9-2x)^2 x$

Los estudiantes usan EXCEL para ingresar en la columna valores de x, los cuales permitirán encontrar los volúmenes asociados al evaluar en la fórmula anterior.
Luego insertan la gráfica y su ecuación de regresión.

De la gráfica se puede inferir que el valor máximo se encuentra cuando x=1.5cm, luego el volumen es 54cm^3.

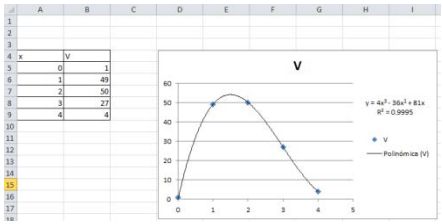


Ilustración 6

Reflexiones: El uso racional del recurso tecnológico facilita la articulación de registros en el sentido de Duval, a partir de situaciones contextualizadas.

El concepto de función exige enfatizar aspectos de dependencia y variabilidad. Luego el docente debe diseñar situaciones contextualizadas para abordar adecuadamente esta práctica de modelación.

Finalmente podemos decir que el uso de herramientas computacionales es importante pues permite identificar y explorar resultados, asi como discutir trayectorias de instrucción hipotética. Si el estudiante utiliza más de una herramienta o recurso, entonces potencializará su pensamiento matemático.

Referencias

Belliard, M., Wul, M., García, F., Pazos, A. (2004). Aprendiendo Matemática y Trigonometría con Excel. Editorial Omicron System. Primera edición.

Barreras, M. (2006). Matemáticas con Microsoft Excel. Editorial Alfaomega. Ra-Ma. Primera reimpresión.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Universidad del Valle. Grupo de educación Matemática.

Hitt, F. (2002). Funciones en contexto. Prentice Hall. 1ra Edición. México

Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. Enseñanza de las Ciencias, (15), 3, p. 377-391. Recuperado el 17 de mayo de 2011, de: http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v15n3p377.pdf

❖❖❖

Analisando os obstáculos no ensino e na aprendizagem da geometria esférica (versión del libro de resúmenes)

Maria Lauricea da S. Shimonishi
Universidade Estadual de Maringá-Brasil
mlsshimonishi@uem.br

Roseli Nozaki G. Andrade
Universidade Estadual de Maringá-Brasil
rngandrade@uem.br

Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá-Brasil
vsfranco@uem.br

Resumo

O presente artigo trata de uma pesquisa que está sendo realizada com o objetivo de detectar pontos de dificuldades no processo ensino-aprendizagem da Geometria da superfície esférica, que é um modelo de Geometria não euclidiana. Essa pesquisa faz parte de um projeto maior que é o da criação de subsídios que auxiliem a implantação de tópicos referentes às noções básicas de Geometrias não euclidianas nos estágios fundamental e médio do ensino da Matemática, em acordo com as diretrizes curriculares do Estado do Paraná (2011). Fundamentamo-nos, teoricamente, nos estudos sobre os obstáculos epistemológicos definidos por Bachelard (1996), sobre os obstáculos didáticos de Brousseau (1983), sobre a teoria da transposição didática de Chevallard (1991) e sobre os registros de representação semiótica de Duval (2003). O levantamento dos obstáculos foi realizado em mini cursos com a participação de professores da rede de ensino da região norte do Estado do Paraná-BR e em mini cursos com a participação de acadêmicos dos cursos de Licenciatura em Matemática e em Geografia da Universidade Estadual de Maringá-UEM. A metodologia utilizada nesses mini cursos

foi mesclada com exposições sobre a evolução histórica da Geometria e a apresentação dos conceitos da Geometria da superfície esférica, com atividades de representações gráficas, de utilização de materiais manipulativos e de softwares matemáticos. Os obstáculos foram detectados através de nossas impressões e observações, da análise dos comentários escritos pelos participantes e das respostas obtidas na aplicação de um questionário. A pesquisa resultou na seguinte lista de obstáculos: o preconceito de que é difícil estudar Geometria; falhas parciais ou quase totais no conhecimento da Geometria Euclidiana; pouco treinamento para representações gráficas e dificuldades na visualização espacial de objetos tridimensionais; não conscientização da importância da visão histórica do desenvolvimento da Geometria e das Ciências; dificuldades na linguagem e na escrita, tanto no setor do entendimento, quanto no setor da expressão dos pensamentos; dificuldades em estabelecer estratégias na resolução de problemas; dificuldades com o manuseio de computadores e, em contraponto, dificuldades em realizar atividades sem computadores; costumes enraizados em que a tônica é a superficialidade no tratamento das questões evitando os questionamentos, as críticas e as discussões; dificuldade no tratamento interdisciplinar da Geometria com outras áreas do conhecimento constantes nos programas curriculares.

Palavras chave: Educação Matemática; Geometrias não Euclidianas, Geometria da Superfície Esférica.

Referências

Bachelard, G. (1996). A formação do espírito científico. Rio de Janeiro*: Contraponto*.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques. *Recherches em Didactiques des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

Chevallard, Y. (1991). La Transposition Didactique. Paris: *La Pensée Sauvage*.

Duval, R. (2003). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Editora Papirus, 11 – 34.

Secretaria de Estado da Educação do Paraná. (2008). *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica* (Texto das Diretrizes Curriculares). Recuperado em 08 de dezembro de 2011, de http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf

❖❖❖

Club de Matemáticas un lugar para la recreación y el aprendizaje (versión del libro de resúmenes)

Fredy Edinsson Cuéllar Aullon
Universidad Surcolombiana – Colombia
fredymate2009@hotmail.com

Eison Víctor Andrés Calderón Muñoz
Universidad Surcolombiana - Colombia
victorandrescalderon@hotmail.com

Resumen

La Matemática recreativa, las adivinanzas lógicas, los problemas de pensar, los concursos de problemas, el cálculo mental, los acertijos y, en general, las diversas actividades lúdicas alrededor de las Matemáticas constituyen en su conjunto un recurso altamente valioso para su enseñanza. Su gran variedad y versatilidad hace que puedan ser utilizados tanto dentro como fuera del aula de clase o en espacios como lo es El Club de Matemáticas, y que además estas actividades puedan servir para introducir un concepto o para consolidarlo, para practicar una técnica o para desarrollar estrategias de resolución de problemas. Pero, más allá de lo que podría ser un simple recurso didáctico, la utilización de la matemática recreativa y la organización de actividades de carácter lúdico alrededor de las matemáticas, constituye un elemento educativo importante que puede incidir en la visión y la motivación que los alumnos se forman sobre éstas, ayudándoles a verlas como una ciencia cuya práctica puede provocar placer y diversión. Además estas actividades enseñan a los escolares a dar los primeros pasos en el desarrollo de técnicas intelectuales, potencian el pensamiento lógico, desarrollan hábitos de razonamiento, enseñan a pensar con espíritu crítico, trabajan con figuras a diario y conviven en un ambiente matemático. Igualmente la utilización de una buena actividad recreativa, es la que no depende de la fuerza,

sino aquella que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de La Matemática Recreativa tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo, cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien, lo cual no quiere decir que la matemática recreativa sea trivial. Ante todo no hay mejor actividad matemática que la que requiere de un pensamiento, de una estrategia, que solo necesita un tablero, unas fichas y ciertas reglas que facilitan el manejo y ayudan al estudio de las matemáticas y a la recreación de los mismos participantes.

Palabras clave: Matemática recreativa, acertijos, puzles, lógica, didáctica.

Referencias

Gardner, M (1986). *Matemática para divertirse*. Edición Original: Dover Publications Inc. New York.

Corbalán, F (1989) *Juegos Matemáticos Para Secundaria y Bachillerato*. Editorial S.A Valle hermoso, 32-28015 Madrid

Alcalá, M (2004). *Matemáticas re-creativas*. Editorial Laboratorio Educativo. Caracas Venezuela.

❖❖❖

Enseñando Física usando las TIC

Delfín Rogelio Rocca Quispe
E.P MIGUEL GRAU – Tablada de Lurín – VMT – Perú
rroccaq@gmail.com

Maritza Ana Ccayahuallpa Huamanhorqque
I.E. 6019 MARIANO MELGAR – VMT – Perú

Resumen

En el presente trabajo se muestra cómo a través del uso de las TICs el estudiante despierta su interés al curso de física al relacionarlo con la vida diaria y encontrarlo entretenido y cautivante ya que se mostraron y examinaron videos seleccionados teniendo como punto de partida que se apliquen conceptos físicos en situaciones que sean cercanas a su realidad y mucho mejor si se da a través de dibujos que le sean propios a su edad. Buscamos una visión transversal de los conceptos básicos de la física, que luego han de expresarse en formulas cuya relación es matemática, de esta podemos tocar temas de historia, ingeniería etc. relacionados con nuestro tema principal. Luego remarcamos los puntos interesantes usando diapositivas y concluimos haciendo crucigramas que verifiquen la comprensión sobre todo teórica del tema.

Temas como: movimiento parabólico, estática, dinámica, electricidad etc son abordados bajo esta temática que en nuestro devenir también se aplico en cursos como: matemática, historia, raz. Verbal etc.

Luego de nuestra experiencia podemos afirmar que hemos logrado una *mejora sustantiva tanto en el nivel académico y actitudinal del alumno en el curso de física,* la cual es verificada por nuestra práctica docente.

Palabras clave: TIC, física, vinculación con la realidad.



Referencias

Victor Coronel. La música y filmaciones de youtube en la enseñanza de la física State University of New York, USA Encuentro Científico Internacional de Invierno 2011.
http://www.youtube.com/watch?v=5vZi1BwNSRY
Revisado el 29 de noviembre del 2011

❖❖❖

Escher[4] *e o ensino de geometria em aulas de matemática*

Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo - Brasil
lhp@upf.br

Resumo

Ensinar matemática e em particular, ensinar geometria, exige do professor uma busca constante de alternativas metodológicas que possam auxiliar o aluno a desenvolver habilidades que possam lhe auxiliar na aprendizagem dos conceitos básicos de geometria. Com esta perspectiva em mente foi desenvolvido uma atividades com alunos do terceiro ano do Ensino Médio (16 -17 anos), de uma escola publica, quando do estudo de geometria espacial, onde os mesmos foram desafiados a construírem uma nova leitura dos trabalhos de Escher, tendo como referência figuras planas ou alguns dos sólidos geométricos. Em um primeiro momento os referidos alunos foram apresentados aos trabalhos de Escher, conheceram um pouco de sua vida e se encantaram com as obras desenvolvidas por ele que, mesmo não sendo matemática, lidou muito bem com formas, noções de espaço, ocupação do bi e tridimensional em suas criações. Num momento seguinte, aos alunos, foi proposto que escolhessem uma de suas obras e buscassem representá-la preservando a essência do trabalho, mas sendo os objetos de atenção e desenvolvimento da atividade elementos da geometria plana: triângulos, quadriláteros, hexágonos, pentágonos, polígonos em geral, retas, pontos e demais itens, bem com a possibilidade de trabalhar com figuras espaciais:

[4] Mauritus Cornelis Escher, nasceu em Leeuwarden na Holanda em 1898, faleceu em 1970. Dedicou sua vida as artes gráficas. Mesmo sem nunca ter estudado matemática, mas através do estudo sistemático e da experimentação, descobre todos os diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. A reflexão é também é utilizada em seus trabalhos de xilografia.

prismas, cubos, paralelepípedos, pirâmides, cones, esferas e demais elementos entendidos como entes geométricos de três dimensões. O resultado alçando foi muito positivo, pois além dos alunos terem um envolvimento bastante significativo, pois ao desenvolverem suas opções de representação foi necessário discutir e buscar aprimoramento em conceitos geométricos inerentes à suas propostas de trabalhos. Esta busca levou a questionamentos e aprofundamentos que contribuíram, de forma extremamente positiva, para uma pré-disposição a compreender e aprofundar estudos envolvendo os conceitos próprios da geometria espacial estudada em sala de aula.

Palavras chave: geometria, ensino de matemática, Escher, metodologia.

Introdução

O trabalho desenvolvido junto a um grupo de alunos de uma escola pública quando do ensino de geometria espacial, ou de forma geral retomado tópicos de geometria plana e também espacial, o que poderíamos considerar como sendo os fundamentos da geometria euclidiana.

Tendo como referência a importância da geometria dentro da estrutura da matemática e o quanto aos alunos, de forma geral, é difícil assimilar algumas ideias básicas desta é que foi pensado o projeto tentando integrar as concepções geométricas presentes na obra de Escher e elementos próprios da disciplina em questão.

Para tanto os alunos foram divididos em grupos, estudaram com orientação do professor as obras de Escher e fizerem considerações tendo como referência os elementos de geometria que estava se estudando em aula. Posteriormente os mesmos foram desafiados a fazer uma releitura destes trabalhos buscando conceber outras perspectivas para os mesmos trabalhos, sendo a geometria plana e espacial o referencial para tais ações.

Posteriormente, após a elaboração dos referidos trabalhos, os mesmos foram expostas e se realizou um seminário de integração da atividade, buscando perceber o alcance da atividade, dificuldades, elementos de natureza geométricos percebidos, relações estabelecidas e tudo mais que os alunos envolvidos pudessem relatar na intenção de bem relacionar com o conteúdo trabalhado em aula.

Sobre a geometria

Impossível pensar uma sociedade, uma organização de pessoas, em qualquer tempo, cultura ou civilização, onde não ocorram manifestações de cunho folclórico, de danças, de música. São manifestações culturais necessárias para expressar como se pensa, se vê, se crê e se vivência o mundo, para o que usa-se a cor, o som e a forma na intenção de comunicar suas concepções.

Através da forma e de edificações espantosamente harmônicas, do ponto de vista geométrico, egípcios e maias construíram pirâmides de dimensões e proporções até hoje provocativas: Como foram feitas? Como, sem a tecnologia de nossos dias, construiu-se com tanta precisão e harmonia? São muitas perguntas e poucas respostas, especulações e considerações científicas na intenção de explicar, racionalmente, o que nos fascina através dos sentidos.

O que também não dizer de obras menores, mas de beleza e percepção geométrica inigualável, como a cerâmica marajoara e os trabalhos de Escher? São manifestações, entre tantas, que enaltecem a capacidade humana de expressar-se por meio das formas, de estimular a percepção ou determinar com precisão o espaço bi e tridimensional que ocupamos.

São faces de um dos ramos mais antigos da matemática: a geometria. Seja intencional ou não, a harmonia, ou a falta dela, na ocupação do espaço, das formas, das linhas, dos

contornos, ao mesmo tempo em que fascinou diferentes gerações de matemáticos, despertou o interesse sobre suas propriedades, gerando um universo de fórmulas, teoremas, corolários e subdivisões, abrigadas sobre o grande véu chamado "geometria". Talvez isso se dê porque "sem conhecer geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida" (LORENZATO, 1995, p. 5).

Assim, ao mesmo tempo em que a geometria é portadora de grandes potencialidades, sua aprendizagem desperta preocupação pela sua ineficiência, como bem ilustramos trabalhos de Lindquist e Shulte (1994), Pereira (2002), e Almouloud (2003), ao mostrarem diferentes faces da aprendizagem da matemática e o quanto se apresentam deficitárias.

Frente a esta constatação a busca da vinculação com os trabalhos de Escher poderia ser uma forma de tornar o ensino de geometria mais significativo e interessante para alunos, que pela faixa etária em que se encontram 16 – 17 anos, são atraídos pelo novo, dinâmico, diferente, como poderia ser classificado os trabalhos de Escher.

Sobre Escher

Escher, ou Mauritus Cornelis Escher, nasceu na cidade Leeuwarden, Holanda em 1898, faleceu em 1970 e teve toda a sua vida associada às artes gráficas. Não se caracterizou como um aluno brilhante quanto era adolescente, muito menos manifestou maior interesse pelos estudos. Embora com tal característica, por influência dos pais ingressou na Escola de Belas Artes de Haarlem para estudar arquitetura. Lá conhece aquele que seria seu mestre e referência para continuar em sua atividade posterior junto a arte gráfica, Jesserum de Mesquita.

Escher, ao contrário que se pode pensar ao olhar seus trabalhos, não possuía maiores conhecimentos em matemática, mas através da experimentação e do estudo sistemático, descobre diferentes grupos de combinações isométricas que deixam um determinado ornamento invariante. Tais descobertas são utilizadas como grande referência em seus trabalhos, bem como o uso da reflexão é muito utilizada na em suas obras de xilografia.

Considerações sobre a atividade

Depois de realizada a experiência acima descrita o saldo de tal iniciativa foi extremamente positivo, uma vez que pelos relados dos alunos envolvidos na atividade, foi extremamente bom realizar o trabalho. Este, além de proporcionar um conhecimento sobre as obras de Escher, que a maioria desconhecia, também foi importante para um aprimoramento e refinamento das ideias básicas de geometria, uma vez que na intenção de compreender como Escher construiu suas obras, se fazia necessário ter um olhar mais atento, perceber minúcias, notar impossibilidades que somente um desenho com focos de desenho em perspectiva diferentes poderiam criar.

A releitura das obras de Escher foi um exercício que excedeu os limites da própria disciplina, uma vez que a grande maioria dos grupos buscou saber sobre o autor em questão, pesquisava suas obras, buscaram fotos, textos e elementos que melhor pudessem elucidar como Escher construía seus desenho, de onde vinha sua inspiração e principalmente criar um senso de estética admirado até hoje.

Referências

Almouloud, S. A. (2003). Registros de representação semiótica e compreensão de conceitos geométricos. *Aprendizagem em matemática*. Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus.

Atalay, B. (2007). *A matemática e a Mona Lisa*. Tradução: Vilela, M. São Paulo: Mercuryo.

Crowley, M. L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: Shulte, AL P., Lidquist, M. M. (1994). *Aprendendo e ensinando geometria*. Tradução: Domingues, H. São Paulo: Atual. 1 – 20.

Der Meer, R. V., Gardener, B. (1995). *Carpeta de matemáticas.* Barcelona: Ediciones Destino.

Lorenzato, S. (1995) Por que não ensinar geometria. *A educação matemática em revista*, 3, 2 – 12.

Lindquist, M. M, Shulte, A. P.(1994). *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual.

Pereira, L.H.F. (2002). Teorema de Pitágoras. Lembranças e desencontros na matemática. Passo Fundo: UPF.

The Matehmatical Art of M.C. Escher. Acessado em 13 de março de 2011, em: http://www.mathacademy.com/pr/minitext/escher/

❖❖❖

Utilizando a história da matemática para o ensino de matemática

Luiz Henrique Ferraz Pereira
Universidade de Passo Fundo - Brasil
lhp@upf.br

Resumo

A História da Matemática é uma das grandes tendências no campo da Educação Matemática e como tal está presente em muito dos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, bem como é foco de encontros nacionais e mesmo internacionais envolvendo a temática (no Brasil se destaca os Seminários Nacionais de História da Matemática e, em um plano mais amplo, os Encontros Lusos – Brasileiros de História da Matemática). Ao se tomar a História da Matemática como disciplina curricular nos cursos que formam professores de matemática, o curso de Licenciatura em matemática da Universidade de Passo Fundo – Brasil criou em sua grade curricular as disciplinas de História da matemática I e História da Matemática II. A primeira busca localizar o aluno frente aos vários momentos percorridos pela matemática junto com o caminhar da humanidade até chegar, ao que hoje, denominamos matemática e matemática escolar. A outra disciplina, História da Matemática II, já tem a pretensão de auxiliar os alunos a pensarem e construírem estratégias metodológicas para ao ensinarem matemática usem da sua história como um aliado para uma aprendizagem significativa. Os alunos, normalmente entre o terceiro e sexto níveis do curso, trabalham em grupos e, sob orientação do professor da disciplina, constroem atividades que eles mesmos julgam possíveis de uma execução futura quando estes já forem professores de matemática. Posteriormente os trabalhas são socializados onde cada grupo apresenta suas propostas e submetem aos demais colegas as atividades propostas. Em seguida é feita uma avaliação onde se

destaca potencialidades e limitações de cada proposta, com a intenção de adequá-las ou aprimorá-las para uma efetiva aplicação em sala de aula. Os resultados observados até o momento dão conta de alunos com maior disposição para ler, pesquisar e mesmo escrever sobre a história da matemática, bem como, de forma geral, desenvolvem habilidades de crítica e reflexão sobre práticas pedagógicas que se não forem devidamente pensadas e executadas provavelmente em nada auxiliaram os alunos a aprenderem matemática. Outro fato positivo observado é o desenvolvimento de uma cultura de criatividade, interação, trabalho em grupo, interdisciplinaridade que é despertada nos alunos após se envolverem com a História da Matemática com esta perspectiva.

Palavras chave: História da matemática, matemática, metodologia.

Introdução

Desde que a disciplina de História da Matemática I e II se tornou presente no currículo do curso de matemática da Universidade de Passo Fundo, foi verificado uma necessidade de oferecer aos alunos um espaço em que se pudesse discutir a História da Matemática como tendência da educação matemática e principalmente propor aos alunos que cursassem estas disciplinas um momento de elaboração de propostas de cunho metodológico, a fim de instrumentalizá-los em suas futuras atividades como professores.

Tal proposta é desenvolvida na disciplina de História da Matemática II, sendo que na História da Matemática I, é dado aos acadêmicos os fundamentos de cunho histórico da matemática, no sentido de compreender períodos onde se desenvolveram diferentes perspectivas para ela, descobertas, avanços e retrocessos de forma muito articulada com os contextos culturais e sócias de diferentes sociedades e períodos históricos.

Aos alunos que buscam cursar a disciplina de História da Matemática II se tenta avançar um pouco mais na reflexão sobre esta parte da matemática, buscando fugir de elementos tão teóricos e determinados, como datas e nomes de matemáticos. A ideia é construir com os alunos elementos de natureza didático-pedagógica que eles possam experimentar, testar, aplicar com seus colegas e também criticar as potencialidades e limitação de cada proposta. Tal atitude estimula a criatividade, o senso crítico, aguça o interesse, a atenção, o cuidado com a elaboração de propostas para o ensino da matemática, sem se descuidar obviamente dos aspectos que envolvem a História da matemática.

A proposta

Os alunos são apresentados a proposta de trabalho no primeiro encontro da disciplina, neste momento, em conformidade com seus interesses, eles são divididos em grupos e a cada grupo é sorteado uma atividade a ser desenvolvido durante o semestre em que ocorre a disciplina. São três as propostas:

1. Elaboração de um jornal temático sobre história da matemática: cabe ao grupo que ficar com esta atividade desenvolver, confeccionar, construir e distribuir aos colegas um jornal, nos moldes de qualquer outro jornal de circulação na cidade, mas que tenha como fundamento maior a História da Matemática. Este material pode ter diferentes seções de acordo com o interesse e interesse do grupo. O foco dado é que este material, se futuramente elaborado com os futuros alunos dos acadêmicos, deve ter condições de ser integrada a sala de aula e ao trabalho do ensino de conteúdos matemáticos quando estes estiverem no trabalho docente.
2. Confecção de jogos didáticos envolvendo a história da matemática: a proposta aqui se alia a outra tendência em educação matemática, que é o uso de jogos para o

ensino de matemática. O que se deseja é que os alunos elaborem diferentes modalidades de jogos sendo a história da matemática a referência maior. Podem ser jogos adaptados de outros existentes no mercado ou criações dos próprios alunos. O aspecto que não pode ser esquecido é como esta atividade poderá ser integrada futuramente a ação docente dos alunos.

3. Construção de questões com foco na história da matemática: a intenção é que ao buscar realizar esta atividade os alunos percebem os muitos aspectos a serem observados quando se deseja elaborar uma questão. Quando a questão é de história da matemática maior deve ser o cuidado, pois o tema, o protagonista ou data a ser vinculada a questão deve ser conhecido do grupo ao qual de irá propor a atividade, bem como tem de se pensar em como isto pode se fazer presente em sala de aula de uma forma dinâmica e interessante aos envolvidos.

Considerações sobre a atividade

A atividade descrita anteriormente já vem ocorrendo há alguns semestres e o que e possível perceber é o quanto os alunos se envolvem nas atividades, constroem propostas interessantes e criativas, inovam, questionam, lêem com maior freqüência, retornam as suas anotações da disciplina de História da Matemática I, esclarecem pontos que pareciam terem sido entendidos, mas que ao relerem surgem outras dúvidas, novas necessidades e principalmente a intenção de construir outras propostas para um trabalho futuro além destas sugeridas a eles.

Tal atividade mostra o potencial da história da matemática como uma grande aliada para a compreensão de ideias básicas da matemática e que podem com certeza serem aproveitadas em sala de aula quando do ensino por parte dos qua ainda estão se formando para serem professores de matemática.

Referências

Abreu Júnior, L. (1996). *Conhecimento transdisciplinar*: o cenário epistemológico da complexidade. São Paulo: Editora Unicamp.

Abreu Mendes, I. Fossa, J & Nápoles Vadés, J. E. (2006). *A história como um agente na educação matemática.* Porto Alegre: Sulina.

D'Ambrosio, U. (1997). *Transdiciplinaridade*. São Paulo: Palas Athena.

Miguel, A., Jesus Brito, A., Carvalho, Dione Lucchesi de & Abreu Mendes, I. (2009). *História da matemática em atividades didáticas.* (2th ed.) São Paulo: Editora Livraria da Física.

Selbach, S. (2010). *Matemática e didática*. Petrópolis: Vozes.

❖❖❖

Aplicación de matebloques en el aprendizaje del algebra (versión del libro de resúmenes)

Wilman Durán Tovar
Universidad Surcolombiana-Colombia
Wdt0526@hotmail.com

Mayda Lorena Cuellar Cerón
Universidad Surcolombiana-Colombia
lorenita2710@hotmail.com

Resumen

Ante la dificultad que se presenta en el aprendizaje del algebra alrededor de su diferencia con la aritmética en el significado y tratamiento de los símbolos, es posible utilizar los matebloques como un punto de partida para apoyar una fase del desarrollo conceptual y propiciar el manejo operativo en la iniciación al álgebra; de esta manera se motiva al estudiante para que realice algunas indagaciones y formule sus propias ideas sobre lo que sucede, antes de arribar a la simbolización y el manejo abstracto; pues es importante que los estudiantes ejecuten actividades con materiales que puedan "manipular" y que tengan reglas sencillas de manejo, de tal modo que el maestro pueda diseñar actividades en las que el educando pueda ir conformando las nociones que interesa abordar; esto es útil en el futuro porque le brindará estrategias para reconstruir y utilizar productivamente los conceptos. En los trabajos elaborados por los griegos y los árabes encontramos que consiguieron resolver ecuaciones de segundo grado utilizando, el método de completar el cuadrado con aplicación de áreas; ambas civilizaciones se valieron de representaciones geométricas para mostrar hechos algebraicos, como se evidencia en el II libro de los Elementos de Euclides. El modelo de área para representar cuadrados de binomios y ecuaciones cuadráticas alcanza cierta difusión en la enseñanza escolar en los años 60 y 70 a través del trabajo del Dr.

Zoltán Dienes. Este matemático y didacta húngaro, en colaboración con el psicólogo cognitivo Dr. Jerome Bruner, trabaja en un proyecto cuyo objetivo es enseñar estructuras matemáticas a niños de escuela básica (entre 5 y 13 años), en concordancia con el enfoque de la enseñanza de la matemática de la época. Para eso se apoya en el uso de manipulativos (materiales concretos) especialmente diseñados, con los cuales busca representar lo más "puramente" posible los conceptos matemáticos y lógicos que se consideran pueden ser estudiados en esas edades. En nuestro caso el modelo de matebloques que emplearemos consta de varios cuadrados grandes de longitud x, varios cuadrados pequeños de longitud 1 y rectángulos de longitudes x y 1 respectivamente. En ellos el color rojo representa una magnitud positiva y el color azul una negativa. Después de un periodo prudencial de uso, se espera que los estudiantes manejen los procedimientos y estructuras sin la ayuda que este les brinda.

Palabras clave: matebloques, álgebra, variables, áreas, factorización.

Referencias

Mancera, E. (2004). *Matebloquemática*. Mexico: Ed. Iberoamerica.

Dienes, Z. (1970). *Conceptos algebraicos. En la construcción de las matemáticas*. (Págs. 60 a 90). Barcelona: Ed. Vicens-Vives.

Dienes, Z. (1971). *El aprendizaje de las matemáticas. Dienes y Golding*. Argentina: Ed. Ángel Estrada y Cía S.A.S

❖❖❖

Algunas características y potencialidades del sistema de numeración muisca (versión del libro de resúmenes)

Christian Camilo Fuentes Leal
Universidad Distrital Francisco José de Caldas - Colombia
cristianfuentes558@hotmail.com

Resumen

En el aula de matemáticas usualmente los sistemas numéricos se relacionan con la historia de culturas occidentales o pseudoccidentales tales como el sistema de numeración Romano, Griego, Babilonio o Egipcio, sin embargo autores como Fedriani & Tenorio (2004) y Pilares (2005), muestran los aportes de las culturas Americanas en la creación de sistemas de numeración propios, lo cual hace visible la necesidad de presentar los posibles aportes que pudieron haber hecho las comunidades existentes en el territorio Latinoamericano y en este caso el Colombiano; en el presente documento se mostrará el caso de indígenas Muiscas, quienes habitaron desde el siglo VI A.C. al XIX, en el centro geográfico de lo que hoy se denomina como Colombia, al hacer evidente este tipo de aportes matemáticos, se presentará en el aula de clase una visión de matemática desde un enfoque sociocultural, democrático, en el cual se reivindique los saberes de las comunidades preexistentes en el territorio Americano y Colombiano.

En el presente documento se pretende abordar algunas características, propiedades y potencialidades pedagógicas que pudiera tener el sistema de numeración Muisca, para la elaboración de este escrito se implementó las búsqueda de diferentes tipo de información iniciando desde los documentos del siglo XVIII, donde el padre José Domingo Duquesne, quien fue la primera persona en escribir menciona la posible existencia de un sistema de numeración escrita utilizado por esta comunidad nativa,

documentos arqueológicos y antropológicos del siglo XX como Triana (1970, 1984), entre ellos y Izquierdo (2008) quien en su tesis doctoral hace una interpretación del sistema de numeración Muisca, con base a la información encontrada se presentan los guarismos o símbolos los cuales cada una representa un número de uno a diez y su respectivo esquema de análisis lingüístico y estructura del sistema de numeración, es importante mencionar que todos estos elementos pueden ser de vital importancia para la enseñanza tanto de las características como de la estructura de los sistemas de numeración, para dar a conocer a los estudiantes que la matemática es una construcción social que tiene el poder de transformar realidades y no un cuerpo de saberes muertos que sólo una elite maneja.

Palabras clave: Etnomatemática, Sistema numérico, Historia de las matemáticas.

Referencias

Fedriani, M. & Tenorio, A. (2004) Los sistemas de numeración maya, azteca e inca. *Lecturas Matemáticas* Volumen 25, 159-190. Extraído 15 Octubre de 2009 en http://www.scm.org.co/Articulos/756.pdf

Izquierdo, M. (2008) *The Muisca Calendar: An approximation to the timekeeping system of the ancient native people of the northeastern Andes of Colombia*, Tesis de postgrado de la Universidad de Monteal, Canadá, extraído 15 Octubre de 2009 en http://arxiv.org/pdf/0812.0574

Molina, E. & Díaz, L. (1988) *Algunos aspectos de los numerales en la familia lingüística macrochibcha*. Tesis pregrado de Universidad Nacional de Colombia.

Pilares, G. (2005) *Los sistemas numéricos del Quechua y el Aimara.* Ministerio de Educación, Dirección Nacional

de Educación Bilingüe; Lima. Extraído 15 Octubre de 2009 en http://portal.perueduca.edu.pe/boletin/boletin57/vinculos/link%20investigadores.pdf

Triana, M. (1970) *El Jeroglífico Chibcha*, Fondo de promoción de la cultura del Banco Popular, Bogotá.

Triana, M. (1984) *La Civilización Chibcha* Fondo de promoción de la cultura del Banco Popular Vol. 4, Bogotá.

❖❖❖

Aprendiendo álgebra con fichas de colores (versión del libro de resúmenes)

Isabel Zoraida Torres Céspedes
Colegio Peruano Norteamericano Abraham Lincoln. Perú
itorres@abrahamlincoln.edu.pe

Resumen

El álgebra es una de las ramas de la matemática que todavía en la actualidad se sigue enseñando de forma muy abstracta, haciendo que muchas veces los estudiantes muestren desinterés. Esta experiencia muestra una forma diferente de trabajar los números y las variables. Aborda los temas de álgebra de una forma concreta-lúdica haciendo que los alumnos empiecen a comprender y realizar operaciones usando las fichas de colores. Permite trabajar los temas de reducción de términos semejantes, multiplicación y división de polinomios, factorización y ecuaciones de primer grado.

Las actividades propuestas con las fichas siguen la secuencia de la teoría de Situaciones Didácticas y están diseñadas para descubrir y no para realizar largas sesiones de ejercicios que hacen que el alumno aprenda un determinado algoritmo sin entender.

La actividad empieza desde la construcción de las fichas por los alumnos respetando las indicaciones de colores y medidas que se les asignó. La mayoría de los alumnos usó para la fabricación cartulina canson de colores. Asimismo cada uno se consiguió una cajita donde se guardarían las fichas al término de cada sesión de clase.

Este póster se basa en un taller que se hizo en 6 sesiones de dos horas pedagógicas cada uno. Al principio se buscó que los alumnos se familiaricen con las fichas construidas y luego se enfrentaran a diversas situaciones las cuales se buscaron en todo momento que fueran significativas para ellos.

Así mismo esta metodología empleada es una oportunidad para fortalecer cualidades como la paciencia y la perseverancia, y de ayudar a los estudiantes a desarrollar nuevas formas de pensar. Por lo tanto será positivo considerar en las clases actividades que conduzcan a la utilización de material concreto para fortalecer el proceso enseñanza-aprendizaje

Palabras clave: álgebra, lúdico, material concreto.

Referencias

Almouloud, S (2007) *Fundamentos de didática de matemática.* Brasil: Editora UFPR.

Artigue, M (1998) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Avila, A (2001) El maestro y el contrato en la teoría Brousseauniana. Artículo publicado en la *Educación Matemática*. Vol.13 México: Editorial Iberoamérica.

Brousseau G. (1999) "Educación y Didáctica de las matemáticas", en *Educación Matemática*, México.

Brousseau G. (1994): "*Los diferentes roles del maestro" en Didáctica de Matemáticas*. Aportes y reflexiones, C. Parra; I. Saiz (comp.) Buenos Aires: Paidós Educador.

Guía de Matemática. (2007) "*Programa de Años Intermedios*. Organización del Bachillerato Internacional. Impreso en el Reino Unido

❖❖❖

Entraves e conquistas de professores no uso de tecnologia para ensino de matemática utilizando teoria hipotética da aprendizagem (version libro de resúmenes)

Luciane Santos Rosenbaum
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
lusrosenbaum@terra.com.br

Miguel Fortunato Athias
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Célia Maria Carolino Pires
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Agnaldo da Conceição Esquincalha
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Resumo

Resultados de pesquisas mostram que, a expansão na implantação das tecnologias nas escolas não foi acompanhada pela otimização dos recursos, que têm sido utilizados de maneira errada ou sem planejamento adequado. As políticas públicas de oferta de tecnologias para promover a igualdade de oportunidades e resultados educacionais como meio de usar a educação para garantir a inclusão social em termos de oportunidades e resultados tecnológicos é preocupação de várias instituições governamentais. O propósito do poster é apresentar um panorama atual das pesquisas que discutem o uso das tecnologias para o ensino de Matemática e comunicar sobre o projeto "Construção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, THA, e implementação de inovações curriculares em Matemática no Ensino Médio: uma pesquisa colaborativa entre pesquisadores e professores", desenvolvido na PUC-SP entre 2007 e 2011. Os pesquisadores participantes visavam contribuir para aproximar as teorias e estudos da área de Educação Matemática dos currículos praticados nas salas de aula do Ensino Médio, a partir da elaboração e desenvolvimento

em sala de aula de trajetórias hipotéticas de aprendizagem que consistiam em sequências didáticas elaboradas a partir dos pressupostos teóricos de Simon (1995). As tarefas elaboradas contemplaram temas como resolução de problemas, investigação, o uso de tecnologias e abordagens interdisciplinares. Lévy (1999) destaca dois obstáculos que dificultam a inclusão digital: (1) infraestrutura, que ainda causa desigualdade e exclusão, mas que pode ser superado com iniciativas governamentais, e (2) humano, que consideramos mais difícil de ser superado, pois é regido pelos sentimentos de incompetência e desqualificação frente às novas tecnologias. Nos cursos de formação inicial para professores, os alunos têm contato com as tecnologias em disciplinas específicas que apenas apresentam as técnicas de como usar tais recursos. Tipicamente essas disciplinas não ensinam como usar tais tecnologias em sala de aula e como estas contribuem com o desenvolvimento de conteúdos matemáticos. É preciso que o futuro professor receba uma formação que forneça estratégias bem definidas de como tais meios contribuem com o processo de ensino e aprendizagem, mas que sozinhos, não bastam (GATTI & BARRETO, 2009). A utilização errada das tecnologias leva ao professor uma frustração ainda maior, este é um grande desafio não só dos professores, mas dos professores formadores. Os resultados de um estudo de caso realizado em países europeus indicam que o professores são as principais causas de dificuldade em introduzir inovação na educação. Comumente, os currículos analisados apregoam o uso das TIC, porém o problema se atém mais à vontade dos professores e às condições das escolas (PERALTA & COSTA, 2007).

Palavras chave: formação de professores de Matemática, tecnologias no ensino, Teoria Hipotética da Aprendizagem.

Referências

Gatti, B. A.; Barreto, E. S. S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Lévy, P. (1999). *Cibercultura*. Trad. Carlos Irineu da Costa. São Paulo: Ed. 34

Peralta, H. & Costa, F. A. (2007). Competência e confiança dos professores no uso das tic. síntese de um estudo internacional. In: *Revista de Ciências da Educação*, nº3.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, nº 26.

❖❖❖

Isometrías en los diseños de los tejidos de telar de la comunidad rural Porcón, Cajamarca

Lucrecia Isabel Cieza Paredes
lcieza@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo explora en el conocimiento de los artesanos cajamarquinos para elaborar los diseños geométricos en sus telares y conocer su desarrollo a través del tiempo y de sus tradiciones. Cómo cultivan su arte milenario; cómo resuelven sus problemas para realizar las diferentes formas que se visualizan y los conocimientos matemáticos que en ellas nos comunican.

El estudio específico es determinar las transformaciones isométricas evidentes en algunos diseños. El marco teórico es el enfoque de la Etnomatemática de Ubiratan D´ Ambrosio. Se ha realizado una primera fase del estudio, correspondiente a la Etnografía del grupo identificado: Porcón, Cajamarca. Mediante la Observación sin participación y primeras entrevistas.

La segunda fase de la investigación que consiste en describir holísticamente los procedimientos realizados y explicar matemáticamente las isometrías que presentan los diseños de los telares, podrá dar mejores fundamentos y argumentos al presente estudio.

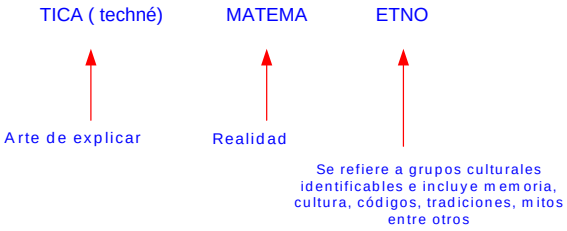
Palabras clave: Etnomatemáticas, Holístico, Isometrías, Etnografía, Telares.

Introducción

La inquietud de estudiar la geometría al interior de la manifestación de arte en los telares, nace al mirar matemáticamente, los diseños elaborados pues presentan muchas evidencias del uso de conceptos geométricos.

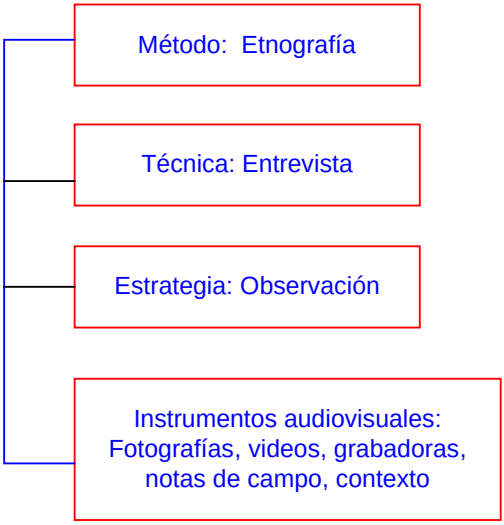
Se visualiza formas y figuras que se repiten, figuras que dan idea de movimiento, imágenes que giran, colores que se combinan. ¿Qué conocimientos geométricos subyacen en ellos? ¿Hay simetría en sus motivos?¿Es posible construir un puente entre este conocimiento matemático natural y la matemática científica para la enseñanza de la matemática?

La manifestación cultural es un hecho de los diferentes pueblos y su estudio es abordado en diferentes lugares del mundo. En el campo de la Matemática, muchas investigaciones y proyectos se han realizado con el fin de conocer el saber-hacer matemático de grupos identificados, siendo la línea orientadora el Enfoque de la *Etnomatemática;* programa de investigación fundado e impulsado por Ubiratan D' Ambrosio, quien puntualiza que Etnomatemática es el arte de explicar y comprender la matemática en otros contextos.


TICA (techné)
MATEMA
ETNO
Arte de explicar
Realidad
Se refiere a grupos culturales identificables e incluye memoria, cultura, códigos, tradiciones, mitos entre otros

Se precisa conocer y respetar las propias culturas como punto de partida de la Matemática, para un mejor desarrollo inmerso en la globalización y políticas de paz.

Investigación: Se realiza aplicando la metodología propuesta por la Etnomatemática.



Primera fase

Esta tarea inicial sobre la Etnografía, se realiza en dos momentos:

1. Observación sin participación: Conocimiento del contexto cultural social de los pobladores de Porcón, Cajamarca.

   Se realizó en Biblioteca Nacional del Perú. Lima, Biblioteca Pucp. Lima- Perú, I N C Cajamarca, Arzobispado Cajamarca, Universidad Nacional Cajamarca, Municipalidad Cajamarca. Museo Etnográfico de Cajamarca, libros de autores cajamarquinos.

2. Trabajo de campo: Modo de vida de los tejedores rurales, proceso general y finalidad de su trabajo.

1° Informe

Ubicación:
Cajamarca se ubica en la Sierra norte del Perú, frontera con Ecuador, entre los paralelos 4º 30' y 7º 30' de latitud sur y 77,47º y 79,20º de latitud oeste.
Altitud: mínima de 400 msnm, máxima 3590 msnm.



· Superficie: 33 317,54 km2
· Topografía:

Tiene suaves pendientes y numerosos valles y quebradas. Hay cuatro zonas climáticas: 1)*Tropical baja*, de valles y cañadas donde se cultiva yucaa, cítricos, plátanos, caña de azúcar, coca, etc. 2)*Templada*, productora de granos, maíz, arvejas, lentejas, trigo, zapallo, caigua y hortalizas.3) *Jalca*, zona fría dedicada al cultivo de la papa y otros tubérculos. 4)*Jalca fuerte*, de pastos naturales, se vive del pastoreo.
La ciudad de Cajamarca, tiene un clima semiseco y templado. Temperatura media anual máxima es 22°C y la mínima de 5°C.





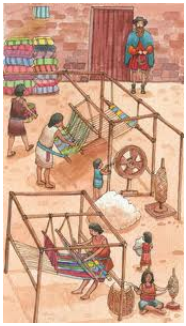
Historia:

Desde tiempos remotos, aproximadamente 12000 aC, se asentaron diversas culturas, hasta 1130 aC, llamado 1) *Período Lítico*, se tiene vestigios de El Cumbe, Maqui Maqui, Cerro Blanco en San Pablo, Pandache, en Chota, 2) *Horizonte Formativo*, aprox. hasta 250 aC: Pacopampa en Chota, Huacaloma Tardío Kuntur –Wasi en San Pablo, y Layzón. En los siguientes períodos 3) *Intermedio Temprano* 250 aC- 650dC, se inicia la Tradición Cajamarca I, II, (Inicial) y III(Medio). 4) *Horizonte Medio*, 650-1180

dC. Cajamarca IV (Tardío); 5) *Intermedio Medio Tardío*, 1180-1430 dC aprox., Cajamarca V. Desde Cajamarca III, corresponde el REINO DE CUISMANCO. 6) *Horizonte Tardío*, 1430- CONQUISTA INCAICA.



El señorío de Cuismanco, habría sido conquistado por los incas durante el gobierno de Pachacútec y Cajamarca fue un importante centro administrativo del Tahuantinsuyo.
Cajamarca es uno de los lugares más simbólicos de la historia peruana pues fue el punto de encuentro de dos mundos diferentes (1532). Su plaza principal fue escenario de enfrentamiento entre los hombres de Atahualpa, último inca del imperio y las tropas del conquistador Francisco Pizarro. Atahualpa fue derrotado, hecho prisionero y ejecutado en la misma plaza, a pesar del rescate que diera en oro y plata.



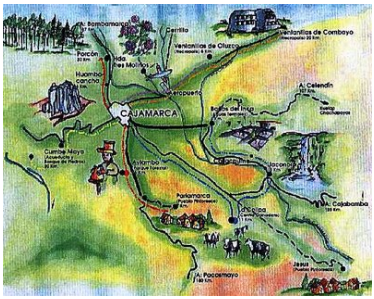
Hacia el año 1566, los españoles levantaron la ciudad sobre un antiguo centro administrativo inca con el nombre de la Villa San Antonio de Cajamarca la Grande del Perú y durante los dos primeros siglos del virreinato, se desarrolló en la zona el mundo nativo rural vinculado al cultivo de la tierra y al cuidado del ganado. Cajamarca destacó desde sus inicios por su tradición textil, allí se instalaron "*Obrajes*", para la elaboración de telas y diversos tejidos.

Respecto al nombre de Cajamarca, existen muchas interpretaciones acerca de su significado; pero la del historiador cajamarquino Horacio Villanueva Urteaga, es más cercana a la realidad del pueblo. Según Villanueva, proviene del aymara y es "pueblo del rayo", lo que es

particular ya que la divinidad principal de los antiguos cajamarquinos fue Catequil, Dios del Rayo.

El primer obraje se ubicó en la zona de Porcón, por la esposa de Melchor Verdugo.

Porcón, se ubica hasta más o menos 30 km de la ciudad, a lo largo del llamado ahora corredor turístico. Por la carretera hacia Bambamarca.





De acuerdo a los estudios sobre Educación para Población Rural en Perú, en 10 de los 24 departamentos que tiene el Perú, la pobreza se presenta con una incidencia igual o mayor al 70%: Cajamarca (77,4%)

A pesar de las diferentes problemáticas a lo largo del tiempo, los pobladores producen sus obras artesanales como solución y respuesta a ellas desde sus conocimientos.

2° Trabajo de Campo:

Demografía de pobladores zona Porcón.
Tejedores. Objetivos. Materiales. Proceso del tejido.
Poster. (Sintetiza la primera parte**).**

Referencias

Aguirre, A. (1995). Etnografía. Metodología Cualitativa en la investigación sociocultural. Barcelona (España). Marcombo.

Balbuena, L. (2000). Las Celosías, una Geometría alcanzable. (6a. Ed.). Tenerife.

Balbuena, L., De la Coba, L. (2003). Geometría de los calados Canarios. Gráficas Sabater. Cajacanarias.

D'Ambrosio, U. (1986). Da Realidades a Acao: reflexoes sobre Educacao e Matematica.(2ª ed.). Summus Editorial, Sao Paulo.

Godino, J.D., Batanero, C. Font, V. (2004). Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas para maestros. Granada.

Jaime, A., Gutiérrez, A. El Grupo de las Isometrías del Plano. EDITORIAL SÍNTESIS, S.A. Madrid.

Lages, E. (1996). Isometrías. Instituto de matemáticas y Ciencias Afines. IMCA. La Molina- Lima, Perú.

Sarmiento, J. (2008). Una centuria de logros y desafíos. La Educación en Cajamarca: Siglo XX. Cajamarca: Martínez Compañón Editores S.R.L.

❖❖❖

A transição ensino médio e superior: um estudo de caso para o desenvolvimento da noção de derivada no estado de São Paulo – Brasil (version del libro de resúmenes)

Lucia Helena Nobre Barros
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
luciahnobre@gmail.com

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
kvingar21@gmail.com

Francisco Regis
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil
fregis@ifce.edu.br

Vieira Alves
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Brasil

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de identificar quais conhecimentos são supostos disponíveis para os estudantes do Ensino Médio quando se deseja introduzir a noção de derivada de uma função, e como relacioná-los aos conceitos dessa mesma noção no Ensino Superior. Na tentativa de entender quais as dificuldades que os estudantes enfrentam em aprender o Cálculo Diferencial e Integral, buscamos investigar quais conhecimentos são supostamente disponíveis para essa noção quando esta é trabalhada no Ensino Médio, por meio de algumas tarefas que aparecem frequentemente nessa etapa escolar e retomadas no Ensino Superior. Para tal, escolhemos como referencial teórico os níveis de conhecimentos de Robert (1997) que permite identificar quais os connhecimentos podem ser esperado dos estudantes em relação às possibilidades de articulação para o desenvolvimento de novos conhecimentos, em particular, a noção de derivada. Dessa forma, propomos a seguinte metodologia para o desenvolvimento da pesquisa: analisar algumas tarefas

que são recorrentes em livros didáticos, identificando quais os níveis de conhecimentos podem ser considerados para a execução das tarefas – técnico, mobilizável ou disponível, segundo a definição de Robert (1997), e assim, identificar o que pode ser considerado conhecimento suposto disponível para a introdução da noção de derivada de uma função quando estas tarefas forem revisitadas no Ensino Superior. Finalizando, apresentamos quais as posibilidades de articulação dos níveis de conhecimentos identificados, e como estes podem ser considerados para o auxílio do desenvolvimento da noção de derivada nas diferentes etapas escolares do Ensino Médio, e como estes podem ser revisitados no Ensino Superior.

Palavras-chave: Derivada de uma função. Níveis de conhecimento. Transição Ensino Médio e Superior. Tarefa.

Referências

Guidorizzi, H. L. (2001). Um curso de Cálculo. Rio de Janeiro (Brasil): Livros Técnicos e Científicos, v. 1.

Nobre Barros, L. H., Dias, M. A. & Campos, T. M. M. (2010). Os pontos de vista privilegiados no ensino da noção de derivada de uma função no Ensino Superior do Brasil. In: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* Vol. 23. (pp 681-690) México, DF (México): Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. México.

Robert, A. (1997). Quelques outils d'analyse epistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques*. Houlgate. França.

Smole, K. S., Diniz M. I. (2008). *Matemática – Ensino Médio* – 3ª série, v. 3. São Paulo (Brasil): Saraiva.

❖❖❖

Introducción a la programación lineal. Una mirada desde la teoría de situaciones didácticas

Carolina Rita Reaño Paredes
Pontificia Universidad Católica del Perú -Perú
creano@pucp.edu.pe

Resumen

El presente trabajo de investigación, detalla la construcción, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica que contribuye a que los alumnos usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la P.L.

El marco teórico empleado es fundamentalmente la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau debido a que en el presente trabajo de investigación la componente didáctica tiene una relevancia especial. El proceso metodológico para concretar lo propuesto se apoya en la Ingeniería Didáctica y en el análisis de los resultados se usa también la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval. Se obtuvo una secuencia didáctica que contribuye a que, al resolver problemas contextualizados de P.L., los estudiantes coordinen los diferentes registros de representación (con énfasis en el gráfico) y obtengan conclusiones interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

Palabras clave: sistemas de inecuaciones lineales, programación lineal, registro, situaciones, ingeniería didáctica.

Introducción

La poca atención dedicada al tema Programación Lineal (P.L.) en la etapa escolar de los estudiantes peruanos se hace evidente cuando ellos llevan los primeros cursos de matemática en la universidad. En Malaspina (2008) se

muestra los resultados de una encuesta realizada a los ingresantes 2007-I de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) que culminaron sus estudios en el año 2005 ó 2006 e ingresaron a la PUCP en el 2006 o en el primer semestre 2007 y se matricularon en el semestre 2007-1. Este número asciende a 1610 estudiantes. En esta encuesta se identificó la Programación Lineal como conocimiento previo muy poco frecuente entre los ingresantes a la PUCP, con percepciones similares entre ingresantes a letras y ciencias. Destaca el resultado relacionado con la Programación lineal, pues un 66% manifiesta que no le enseñaron, lo cual revela la poca atención que se brinda en la secundaria a temas de optimización a pesar de su importancia.

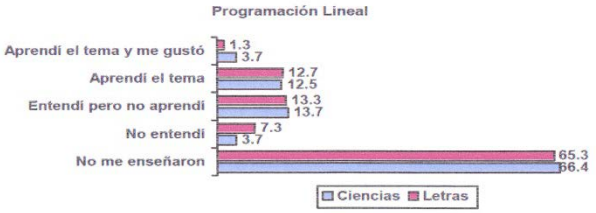


Figura 1

Fuente: Malaspina, 2008, p.195

Por otro lado, en la experiencia de dictado del tema mencionado se han notado, en ellos, serias deficiencias para transitar y coordinar los diferentes registros de representación, principalmente para analizar e interpretar las gráficas. Se nota también que sus explicaciones se ven limitadas por la falta de experiencias previas en el empleo adecuado de argumentos, procedimientos, proposiciones y lenguaje formalizado, a pesar de que muestran capacidades para intuir las respuestas correctas a los problemas propuestos.

Así nos planteamos responder la siguiente pregunta de investigación:

¿Es posible proponer una situación didáctica que induzca a los alumnos a usar comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas de Programación Lineal, transitando y coordinando los diferentes registros de representación con énfasis en el registro gráfico?

Así, el presente trabajo de investigación, detalla la construcción, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica, compuesta por cuatro actividades, que contribuye a que los alumnos usen comprensivamente los sistemas de inecuaciones lineales con dos variables y sus aplicaciones a la P.L. Acontinuación se muestra como ejemplo parte de la primera actividad:

Actividad 1

NUEVOS JUGOS…

La empresa "FRESH" dedicada a la venta de jugos envasados, ha decidido lanzar al mercado dos nuevos jugos de fruta mezclando dos o más concentrados.

Frutitrío: piña, naranja y plátano
Frutiduo: naranja y plátano

Un Frutitrío requiere de 8 onzas de concentrado de piña, 8 onzas de concentrado de jugo de naranja y 6 onzas de pulpa de plátano.

Un Frutidúo requiere de 12 onzas de concentrado de jugo de naranja y 4 onzas de pulpa de plátano.

La empresa cuenta con un máximo disponible de 24 000 onzas de concentrado de jugo de naranja para la producción ya que no es temporada alta de la naranja, y se sabe que el abastecimiento de los demás concentrados se encuentra garantizado.

Trabajo individual:

a. ¿Cuántas onzas de concentrado de jugo de naranja se necesita para fabricar 3 Frutitríos y 5 Frutidúos?
b. ¿Es posible fabricar 1000 Frutitríos y 1000 Frutidúos? ¿Por qué?
c. ¿Es posible fabricar 1500 Frutitríos y 1000 Frutidúos? ¿Por qué?
d. ¿Qué cantidad de onzas de concentrado de naranja se usará al fabricar "x" Frutitríos e "y" Frutidúos?
e. Utilizando lo encontrado en d, ¿cómo representarías la restricción que se tiene por no ser temporada alta de la naranja?
f. ¿Podrían "x" e "y" tomar valores negativos? Escribe las desigualdades que representan estas restricciones.
g. Grafica en el mismo plano cartesiano las restricciones encontradas en las partes e y f
h. Si se fabrica 600 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?
i. Si se fabrica 3000 Frutitríos, ¿cuántos Frutidúos como máximo se pueden fabricar?
j. Si se fabrica 2000 Frutidúos, ¿cuántos Frutitríos como máximo se pueden fabricar?

Se realizó la experimentación con los alumnos del curso de Matemática aplicada a la economía, que cursan el primer año de la carrera de Turismo en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya (UARM) en Lima, Perú.

Conclusiones:

Hemos comprobado en la práctica cómo funcionan las diversas interacciones entre el alumno, el profesor y el medio, descritas en la TSD. Vimos que es posible concebir una situación fundamental que utilizando los conceptos de situación adidáctica, devolución, contrato didáctico y los distintos tipos de interacciones con el medio, entre otros, logre que los alumnos puedan construir el concepto de Sistemas de Inecuaciones Lineales con dos variables y sus aplicaciones a problemas de P.L., transitando y

coordinando los diferentes registros de representación, con énfasis en el registro gráfico, y que induzca a los estudiantes a obtener conclusiones, interrelacionando su intuición optimizadora con el lenguaje formal.

En las siguientes figuras se puede apreciar por ejemplo su mejora en el manejo de escalas adecuadas al realizar un gráfico en el plano cartesiano

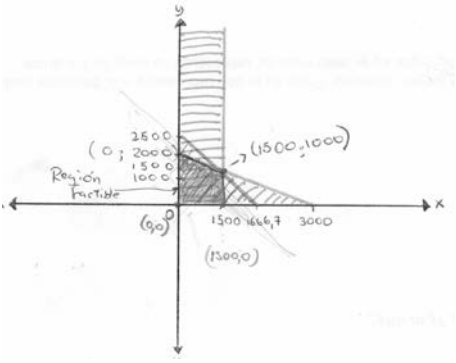


Figura 2

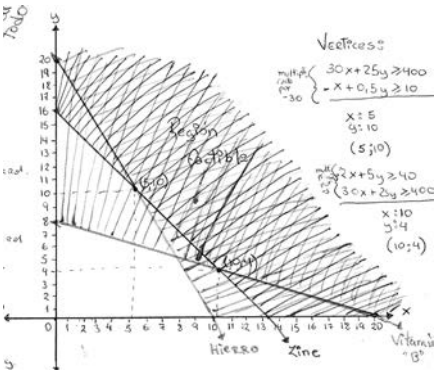


Figura 3

Referencias

Artigue, M. y otros. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.* Universidad de Burdeos. Traducción de J. Centeno y otros.

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, Investigaciones en Matemática educativa II, Université Luis Pasteur de Strasboug.

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis doctoral, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

❖❖❖

El modelo de Van Hiele como marco para el aprendizaje del concepto de parábola como lugar geométrico en alumnos de quinto de secundaria, con apoyo del software geogebra

Ruth Janeth Mechán Martínez
Universidad Católica del Perú
rj.mechan@gmail.com

Resumen

Respondiendo al desarrollo epistemológico y teniendo en cuenta la evolución histórica en el tratamiento para abordar el concepto de parábola pareciera que es "más natural" abordarlo a partir de sus propiedades geométricas, como paso previo a la definición formal del concepto y de las coordenadas preparando las condiciones para su estudio en forma analítica. Más aún en el aprendizaje de la geometría, se transcurre por determinados niveles de pensamiento en la adquisición del conocimiento y se afirma que el estudiante asimilará aquello que le es presentado a nivel de su razonamiento siendo importante diseñar actividades previas para la adquisición de un mejor nivel.

De esta manera, el presente trabajo tiene por finalidad determinar los niveles de pensamiento de los alumnos según el modelo educativo de Van Hiele a partir de la implementación de una secuencia de actividades de enseñanza usando el Geogebra para abordar el concepto de parábola y sus elementos, desde un enfoque geométrico sin el uso de coordenadas cartesianas.

Palabras clave: parábola, lugar geométrico, niveles de razonamiento, Geogebra.

Justificación de la investigación

El estudio de la parábola, que forma parte del curso de geometría según lo señala el Diseño Curricular Nacional

(DCN, 2009), enfatiza el tratamiento algebraico vinculado al enfoque de la Geometría Analítica.

En este contexto, se diseñó una secuencia de actividades a manera de trabajo previo donde se estudiaron las propiedades geométricas de la parábola dado que fueron estas propiedades las que permitieron definirla inicialmente como lugar geométrico.

De esta manera, la secuencia de enseñanza propuesta abordó el estudio de la parábola como lugar geométrico, la cual se implementó en el año 2010, y se contó con la participación de los estudiantes de quinto año de secundaria del colegio Héctor de Cárdenas del distrito de Jesús María.

Fundamentación teórica y metodología

Para la realización del diseño de la secuencia de actividades propuesta se usó el enfoque teórico del modelo educativo de Van Hiele para el aprendizaje de la geometría. La idea central del modelo señala que en el aprendizaje de la geometría, el estudiante transita por determinados niveles de pensamiento y que alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que, con un nuevo orden de pensamiento, se es capaz, respecto a determinadas operaciones, de aplicarlas a nuevos objetos. Así, un alumno puede asimilar aquello que le es presentado a nivel de su razonamiento y si no es así, se debe diseñar la secuencia de actividades que permita la comprensión sobre los objetos matemáticos en estudio

Por un lado, el modelo de Van Hiele abarca dos componentes: 1) Descriptivo, mediante el cual se identifican formas de pensamiento de los estudiantes desde un desde un nivel 1 de visualización hasta un nivel 3 de ordenación o clasificación y 2) Instructivo, que abarca las fases de aprendizaje desde una fase de información hasta una fase de integración.

Se utilizó un software interactivo de geometría, álgebra y cálculo como es el Geogebra en la exploración y manipulación de la parábola, reconociendo sus características geométricas y creando las condiciones para asimilar el concepto. Asimismo, antes y después de la implementación se diseñó y aplicó la prueba de entrada y salida para determinar los niveles de razonamiento plausibles y reales de los alumnos. Además, en base a la interpretación de los argumentos a los ítems de respuesta libre planteados, se identificó el dominio de los niveles de razonamiento de los estudiantes según el tipo de respuesta y el grado de adquisición logrado.

Resultados

Como resultado se halló que el 87% de los estudiantes se ubicaron en el nivel 1 con un grado de adquisición alto y completo, y el 60% de los estudiantes ascendieron de un nivel 1 o de visualización al nivel 2, de análisis logrando un grado de adquisición entre intermedio y alto. En la prueba de entrada, los alumnos participantes evidenciaron un esfuerzo mayor por usar un vocabulario más preciso respecto de la prueba de entrada, confirmando que a cada nivel de razonamiento geométrico corresponde un lenguaje propio a él, afirmación que establece el modelo de Van Hiele.

Conclusión

En conclusión, la secuencia de actividades permitió poner en práctica conceptos relativos al concepto de la parábola y sus elementos preparando las condiciones que conducen a la adquisición del nivel siguiente. Asimismo, se comprobó que la omisión de actividades previas en la fase de orientación dirigida según el modelo de Van Hiele impide en los estudiantes un mejor dominio de conceptos previos que se requieren en la adquisición del concepto de parábola.

Finalmente, cabe señalar la importancia que tiene el hechode que los estudiantes dominen un software interactivo que asocia el uso de herramientas del álgebra y geometría como es el Geogebra, favoreciendo el proceso de enseñanza de conceptos tales como distancia entre dos puntos, recta perpendicular, intersección entre dos puntos, mediatriz, lugar geométrico, eje de simetría, lado recto entre otros conceptos vinculados al objeto parábola.

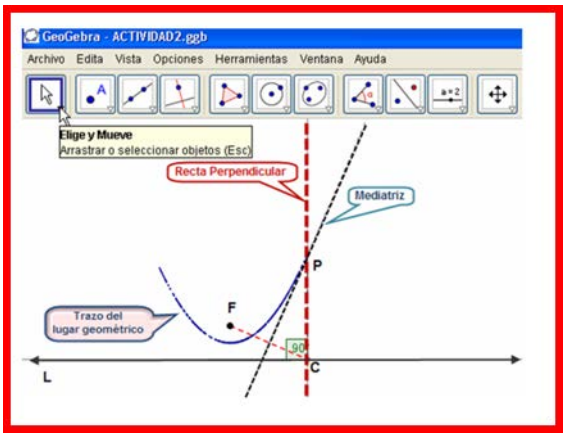


Figura Nº 1: Construcción elemental de la parábola usando Geogebra

Referencias

Boyer, C. (1986). Historia de la matemática. Madrid: Alianza.

De La Rosa, L. (1996) La parábola. Una propuesta para el tratamiento del aprendizaje de las cónicas. Universidad Autónoma de México. Matemáticas. Recuperado el 15 de junio del 2010, de www.cch.unam.mx/ssaa/new/sites/default/files/parabola.pdf

Douady, R. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la*

innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica. Pedro Gómez (editor).

Fernández, E (2009). *Cónicas como lugares geométricos desde un enfoque puntual y global en cabri II plus*. Memoria presentada en el Décimo Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Colombia. Recuperado el 25 de setiembre de 2010 de http://funes.uniandes.edu.co/768/1/conicas.pdf,

Gonzáles, M. (2010) *Construcción de lugares geométricos en un ambiente de Geometría Dinámica*. Pontificia Universidad Católica. Recuperado el 13 de agosto del 2010, de http://macareo.pucp.edu.pe/~mgonzal/publicaciones_archivos/Lug-Geo-y-Geo-Dinamica.pdf

Jaime, A. (1993) *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis de Doctorado. Universidad de Valencia. Recuperado el 25 de setiembre de 2010, de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Jai93.pdf

Kerlegand, K. (2008). *Desarrollo de dos propiedades de la circunferencia. usando el modelo de Van Hiele y la visualización*. Tesis de maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. México: Instituto Politécnico Nacional

Lehmann, C. (1980). *Geometría Analítica.* Editorial Limusa. México

Mata, F. (2006). *Análisis sobre el razonamiento en el aprendizaje de los conceptos de la geometría analítica: El caso particular de las secciones cónicas aplicando el modelo de Van Hiele*". Tesis de maestría en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa. México, D. F., Instituto Politécnico Nacional.

Schunk, P. (1997) Teorías de Aprendizaje, 1997. Editorial Pearson.

Swokowski, E (2005). Algebra y trigonometría con Geometría Analítica. 11ª Edición. Editorial Thompson. México.

❖❖❖

O uso da metáfora no ensino: o caso do cálculo a várias variáveis

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Brasil
fregis@ifce.edu.br

Katia Vigo Ingar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – Perú
kvingar21@gmail.com

Lucia Helena Nobre Barros
Secretaria de Educação do Estado de São Paulo – Brasil
luciahnobre@gmail.com

Resumo

Este escrito constitui um relato de experiência no ensino do Cálculo a Várias Variáveis - CVV. Destarte, desenvolvemos um estudo de caráter qualitativo no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, sobre a exploração didática do uso de metáforas, com apoio computacional caracterizado pelo uso do *CAS Maple* e do *Geogebra*. Um dos problemas iniciais identificados nos livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral em Uma Variável Real - CUV no Estado do Ceará, diz respeito a exploração e emprego de metáforas no sentido de significar/explicar o sentido de alguns conceitos formais, entretanto, ainda com referência aos livros de CVV, não registramos expedientes semelhantes na abordagens dos conceitos e, de modo particular, o caso da continuidade/descontinuidade.

Introdução

Reconhecidamente, o sistema de representação simbólica do Calculo Diferencial Integral a Várias Variáveis – CVV é mais complexo do que o Calculo Diferencial Integral em Uma Variável Real – CUV. Por outro lado, indentificamos nos livros de Cálculo no Brasil, no caso do CUV, a

exploração metafórica de determinados conceitos abstratos.

Distinguem-se, neste caso, o conceito de continuidade e descontinuidade de funções do tipo $y = f(x)$, entretanto, no caso do CVV, para funções do tipo $z = f(x, y)$, não se evidencia o mesmo expediente.

Sobre o ensino do CVV e o uso da metáfora

No ensino do CUV, registramos nos livros (LEITHOLD, 1994, GUIDORIZZI, 2008, STEWART , 2004a) tradicionalmente adotados nas IES do Brasil o recurso de metáforas no sentido de explicar e significar os conceitos. Destaca-se nestas abordagens o conceito de *continuidade* e *descontinuidade* de funções do tipo $y = f(x)$.

Neste sentido, o emprego de termos como "salto", ou "ruptura" fornecem um sentido ao uso e identificação visual da descontinuidade de funções, entretanto, funções do tipo $z = f(x, y)$ não recebem o mesmo tratamento pelos autores de livros (LEITHOLD, 1999, GUIDORIZZI, 2010, STEWART , 2004b). Em alguns trabalhos (ALVES, 2011; ALVES &BORGES NETO, 2011) no Brasil, observamos preocupações no sentido de promover o uso de metáforas no ensino intuitivo do CVV.

Sobre a pesquisa

O *estudo de caso* (VAN DER MAAREN, 1999) foi desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. Assim, no ano de 2011, realizamos uma experimentação com cinco alunos do curso de licenciatura em Matemática. No que diz respeito ao recolhimento dos dados, consideramos os protocolos produzidos pelos estudantes, relativos às estratégias empregadas na solução das questões. No próximo segmento apresentamos os dados do estudo.

Dados e análises

Os dados que seguem referem-se aos alunos 3 e 4 que constituem parte do grupo total de estudantes. Neste caso, o aluno 3, ao ser questionado sobre o comportamento da superfície, explicou

> *Mas tem esse buraco aqui no gráfico...não contínua... Não...esse aqui ta com um furo na origem...essa aqui não tá... essa ta definida na origem...essa não. O limite existe... Quando você se aproxima de zero por ambos os lados... Ela tem o mesmo valor... ta tendendo para o mesmo valor...e pode limitar ela aqui...é por isso que aquela anterior...pode existir..Mas esse item aqui dá as parametrizações..*

Raparemos o termo metafórico "buraco" para designar o comportamento do gráfico da função. Ademais, do lado direito, o aluno identificou de modo visual o caráter ilimitado da imagem da função $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$. Termos como "buraco" ou "cratera", que sugerem o IR^3, não são esplorados pelos livros de CVV.

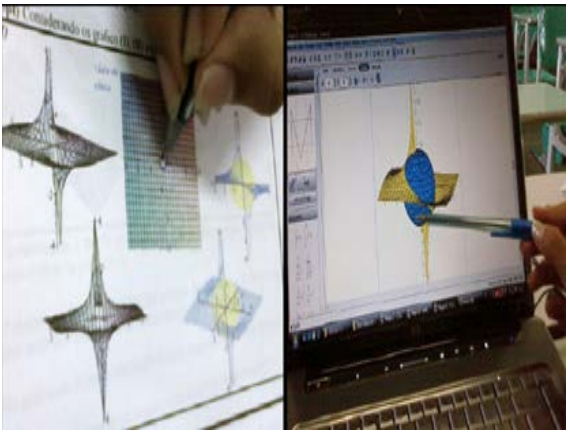


Fig. 1: "buraco" ou "cratera", que sugerem o IR^3.

O aluno 4 usou o *software Maple* no sentido de identificar e comparar os registros gráficos e os registros algébricos das derivadas parciais e analisar sua continuidade na origem.

Quando perguntado sobre a existência do limite e a continuidade da função na origem, o aluno 4 respondeu

> *Não, na origem ela não ta definida...no espaço...Não...acredito que não...se é a gente passa aquela bola...é limitada...ta tendendo a ser...limitada...a gente vê que tem um buraco...a descontinuidade...não é limitada por causa do buraco... Acredito que não. .. Por causa do buraco*

Observamos que a atividade apoiada na visualização provocou uma atividade argumentativa do estudante e evita o processo de algoritmizaçaõ precipitado.

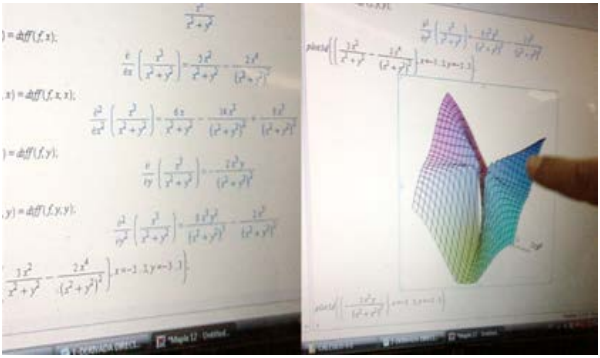


Fig. 2: A existência do limite e a continuidade da função na origem,

Considerações finais e recomendações

O CVV proporciona atividades fastidiosas quando não fazemos um uso adequado da tecnologia. Neste escrito, evidenciamos que o computador proporcionou a formulação de termos metafóricos (OTTE, 2008) que

significam a noção de continuidade/descontinuidade de funções.

Assim, a tecnologia assume um papel de destaque no sentido de proporcionar a designação adequada de termos metafóricos para significar conceitos do CVV.

Referencias

Alves, Francisco. R. V. (2011). Aplicações da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a Várias Variáveis (tese de doutorado). Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 350p.

Alves, Francisco. R. V.; Borges Neto, Hermínio. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. In: *Educação Matemática Pesquisa*. v. 13-3, 597-626. Disponível em: http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/current

Guidorizzi, Hamilton. L. (2008). *Um curso de Cálculo*, v. 1, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC.

Guidorizzi, Hamilton. L. (2010). *Um curso de Cálculo*, v. 2, 5ª edição, Rio de Janeiro: LTC.

Leithold, Louis. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 1, 3ª edição.

Leithold, Louis. (1999). *O Cálculo com Geometria Analítica*. v. 2, 3ª edição.

Van der Maren, J. (1999). *La recherche appliquée en Pédagogie*. Paris : De Boeck & Larcier.

Otte, Michael. (2008). Metaphor and contingency. Radford, L.; Schubring, G. & Seeger, F. Semiotics in Mathematics Education, 63-82.

Stewart, James. (2004a). *Cálculo*. v.1, 4ª edição, São Paulo: Thomson.

Stewart, James. (2004b). *Cálculo*. v.2, 4ª edição, São Paulo: Thomson.

❖❖❖

Una propuesta didáctica para el concepto de límite de una función real en un primer curso de cálculo del nivel universitario

Cristina Sofía La Plata De la Cruz
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú
cristina.laplata@pucp.edu.pe

Resumen

Encontramos que el aprendizaje del concepto de límite de una función real de variable real en un primer curso de cálculo, constituye el punto de partida para el desarrollo y comprensión de otros contenidos matemáticos como continuidad, derivada, integral, sucesiones, series por citar algunos de ellos, los cuales tienen una gran relevancia por sus múltiples aplicaciones en otras disciplinas y ciencias. El propósito fundamental de esta investigación es analizar los principales conflictos en las dimensiones cognitiva, epistemológica y didáctica presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función real.

Palabras clave: Registros de representación semiótica, conversión, límite.

Siendo los objetivos específicos de esta investigación identificar el uso de los registros de representación verbal, algebraico, gráfico y simbólico al estudiar el concepto de límite de una función, identificar los obstáculos epistemológicos al aprender el concepto de límite. Y finalmente diseñar una secuencia didáctica que estimule las conversiones entre diversos registros de representación semiótica para comprender el concepto de límite de una función, consideramos pertinente comenzar con una breve reseña histórica de este objeto matemático y analizar mejor las dificultades propias del concepto que se evidencian en el aprendizaje del mismo. Según Buendía, G. y Molfino, V. (2010) el concepto de límite evolucionó a lo largo de cuatro etapas hasta llegar a la configuración

que hoy conocemos. Desde la Grecia antigua pasando por el siglo XVII, siglo XVIII y siglo XX encontramos que el interés por calcular el área del círculo y otras figuras geométricas motivó la búsqueda de explicaciones a estos problemas que no se podían resolver con los conocimientos que se tenían hasta entonces. Luego el interés por resolver problemas relacionados a la física y la astronomía dieron lugar al uso de métodos infinitesimales que ayudasen a calcular velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos, etc. Sin embargo, el uso de estos métodos presentaba ciertas contradicciones. Así la transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal urgía. No obstante, a pesar que se llego a expresar la definición de límite que hoy conocemos, esta sólo se dio en lenguaje natural lo cual resto su importancia por no prestar las herramientas algebraicas suficientes para su manipulación. Finalmente, se empieza a ver al límite ya no sólo como un proceso sino como un objeto en sí mismo y se establece la representación simbólica de este concepto.

Basados en los objetivos de esta investigación se considera coherente tomar como marco teórico a la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval, R. (1999) y como metodología la Ingeniería Didáctica.

A continuación desarrollaremos algunos aspectos de la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval, R. (1999) que nos ayudaran a fundamentar con propiedad las conclusiones a las cuales lleguemos en esta investigación.

Según Duval, R. (1999). La noción de representación resulta esencial puesto que constituye la forma bajo la cual una información puede describirse y tomarse en cuenta en un sistema de tratamiento. Así las representaciones no tienen nada que ver con una creencia ni con una evocación de objetos ausentes por parte del alumno. Por el contrario, se trata de una codificación de la información. De acuerdo con el autor, la importancia de

las representaciones semióticas consiste en que son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica, los gráficos cartesianos por ejemplo, y en que pueden ser convertidas en representaciones equivalentes en otro sistema semiótico, pero pudiendo tomar significados diferentes para el alumno que las utiliza. La noción de representación semiótica presupone, la consideración de sistemas semióticos diferentes y una operación cognitiva de conversión de las representaciones de un sistema semiótico a otro. Esta operación ha de ser descrita en primer lugar como un cambio de forma. Como por ejemplo, trazar el gráfico de una función dada su regla de correspondencia, o pasar del enunciado de una relación a su escritura literal, habrá de considerarse como el cambio de la forma en que un conocimiento está representado.

Para los alumnos una representación puede funcionar verdaderamente si les permite acceder al objeto representado, y esto se da cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso y que de forma espontánea pueda convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones de ese mismo objeto.

Ahora veamos dos conceptos que se han estado mencionando a lo largo de la explicación de la teoría de registros de representaciones semióticas: tratamiento y conversión. Por lo general no se hace distinción entre las actividades de tratamiento y conversión de las representaciones, a pesar de ser tan diferentes. Sin embargo, es esencial separarlas muy bien. Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un

mismo registro, por ejemplo para nuestro caso particular de límite de una función real tenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x+2$$

Y la conversión por el contrario es una transformación que hace pasar de un registro a otro, demos un ejemplo para entender mejor:

Registro algebraico

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

$\Longleftrightarrow$

Registro numérico

x	$\frac{x^2-4}{x-2}$
1.9	3.9
1.99	3.9
2.001	4.001
2.01	4.01

Podemos decir, que la importancia de esta teoría en la enseñanza de las matemáticas no consiste en elegir el mejor sistema de representación sino en lograr que los alumnos sean capaces de percibir las relaciones entre los diferentes registros de representación para un contenido matemático, que les permita una mejor comprensión del mismo.

Ahora como habíamos mencionado antes, para nuestra investigación hemos considerado oportuno elegir la Ingeniería Didáctica como metodología, pues esta nos permitirá modelar la secuencia didáctica que estimule las conversiones entre diversos tipos de registro de representación. Revisemos entonces la Ingeniería

Didáctica, según Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995) sus fases están conformadas por el análisis preliminar, concepción y análisis a priori de la situación didáctica, experimentación y análisis a posteriori y evaluación. De las cuales detallan los siguientes aspectos. En el análisis preliminar se tiene como objetivo identificar y describir obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos con vistas a la enseñanza y aprendizaje de un determinado contenido. En esta fase se debe realizar el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza, el análisis a la enseñanza tradicional y sus consecuencias, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva.

En la concepción y análisis a priori, se tiene por objetivo diseñar la situación fundamental, como modelo para el análisis de los procesos de comunicación y construcción del saber, en particular para nuestro caso el límite de una función real, y que permita la evolución de dicho conocimiento. También se debe identificar las variables de comando para con ello poder tener un control sobre el comportamiento de los alumnos en las situaciones planteadas así también debe planificarse las intervenciones del profesor.

Siguiendo con lo comentado por Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. (1995) en cuanto a las fases de la Ingeniería Didáctica de experimentación y análisis a posteriori y evaluación o validación tenemos los siguientes detalles.

La experimentación consiste en poner en práctica la situación modelada anteriormente bajo la atenta vigilancia del profesor, quien promoverá el debate entre los resultados encontrados por los alumnos para luego sistematizar e institucionalizar los conocimientos estudiados. En el análisis a posteriori y evaluación o validación se tiene como objetivo validar la regularidad y

reproductibilidad de los fenómenos didácticos identificados basados en los datos obtenidos en la experimentación. Todo esto se confrontara con el análisis a priori que se planteo. Se debe tener en cuenta para plantear esta contrastación los principales resultados obtenidos relacionados con los intereses de nuestra investigación, las hipótesis planteadas y los resultados revisados de otros trabajos de investigación sobre el mismo tema, límite de una función real.

Luego de haber revisado algunos aspectos tanto de la teoría y como de la metodología que emplearemos en nuestra investigación, estamos listos para dar inicio al análisis preliminar, el cual abordará las siguientes dimensiones: *la epistemológica*, con un análisis de algunos de los textos más consultados para límite de una función real de variable real en un primer curso de cálculo; *la cognitiva*, con un análisis de las dificultades más frecuentes presentadas por los alumnos al aprender tal concepto; y *la didáctica*, con un análisis del proceso de enseñanza, así como de las técnicas y recursos que utilizan los docentes para plantear este conocimiento matemático.

Respecto a la dimensión epistemológica, encontramos en uno de los textos más consultados de nuestro medio, la definición de límite de una función real se presenta como sigue

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tange te a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general los métodos numéricos,y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valo res cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercano a 2, pero no iguales a 2.

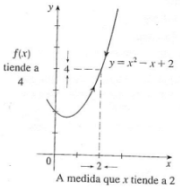


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si puede acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

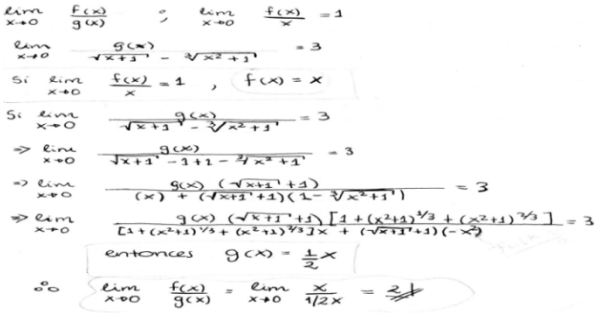
es $f(x) \to L$ cuando $x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

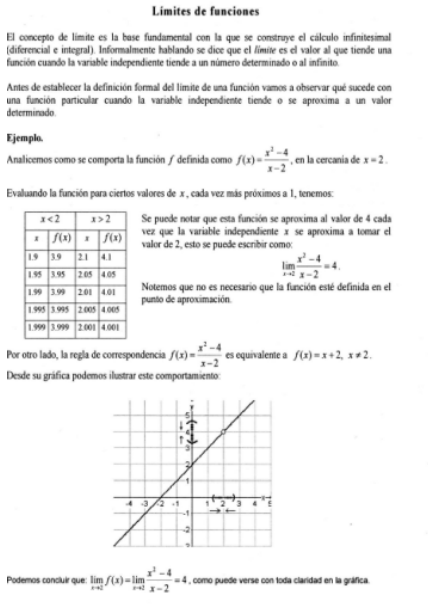
En cuanto a la dimensión cognitiva, a continuación presentamos una de las preguntas planteadas en una práctica calificada de un primer curso de cálculo para alumnos de ciencia e ingeniería y la respuesta que dio uno de los alumnos a la misma.

1. Calcule, si exiten, los siguientes límites:

d. $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, sabiendo que: $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x^2+1}} = 3$



Ahora respecto a lo encontrado en la dimensión didáctica, mostramos uno de los materiales diseñados por los profesores de un primer curso de cálculo para el tema de límite de función real.



Límites de funciones

El concepto de límite es la base fundamental con la que se construye el cálculo infinitesimal (diferencial e integral). Informalmente hablando se dice que el *límite* es el valor al que tiende una función cuando la variable independiente tiende a un número determinado o al infinito.

Antes de establecer la definición formal del límite de una función vamos a observar qué sucede con una función particular cuando la variable independiente tiende o se aproxima a un valor determinado.

Ejemplo.

Analicemos como se comporta la función f definida como $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$, en la cercanía de $x=2$.

Evaluando la función para ciertos valores de x, cada vez más próximos a 1, tenemos:

$x<2$		$x>2$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	3.9	2.1	4.1
1.95	3.95	2.05	4.05
1.99	3.99	2.01	4.01
1.995	3.995	2.005	4.005
1.999	3.999	2.001	4.001

Se puede notar que esta función se aproxima al valor de 4 cada vez que la variable independiente x se aproxima a tomar el valor de 2, esto se puede escribir como:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

Notemos que no es necesario que la función esté definida en el punto de aproximación.

Por otro lado, la regla de correspondencia $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ es equivalente a $f(x)=x+2,\ x\neq 2$.

Desde su gráfica podemos ilustrar este comportamiento:

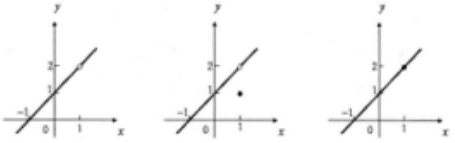
Podemos concluir que: $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$, como puede verse con toda claridad en la gráfica.

El ejemplo anterior nos permite presentar la siguiente definición:

Definición. Sea f definida en un intervalo alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0, si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor x_0 se dice que f tiene límite L conforme x se aproxima a x_0. Simbólicamente se denota como:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplo.

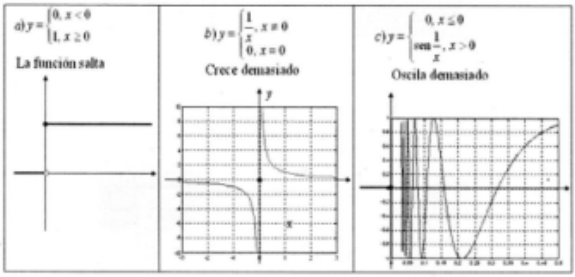


a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ c) $h(x) = x+1$

En estos tres casos notamos que,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} h(x) = 2$$

Ejemplo. Funciones sin límite en un punto

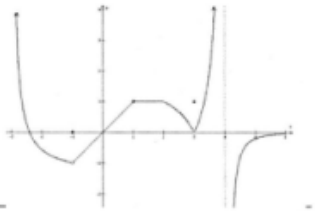

a) $y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$
La función salta
b) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
Crece demasiado
c) $y = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$
Oscila demasiado

Ejercicio.

La siguiente figura representa la gráfica de una función f

Calcule:

a. $\lim_{x \to -1} f(x)$
b. $\lim_{x \to 1} f(x)$
c. $\lim_{x \to 3} f(x)$
d. $\lim_{x \to 4} f(x)$



Finalmente los avances hechos en la presente investigación, nos llevan a afirmar que en textos muy usados en nuestro medio se da poca importancia a la conversión entre los diferentes tipos de registros de representación y que algo similar ocurre durante el proceso de enseñanza. Se enfatiza el uso del registro algebraico recurriendo eventualmente al registro gráfico y simbólico para la interpretación del concepto de límite de una función real. Ello se ve reflejado en algunas de las respuestas erróneas dadas por los estudiantes que a pesar que reflejan su destreza en el uso de la representación en el registro algebraico de tal concepto, no llegan a interpretarlo correctamente.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática*. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los andes.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.

Molfino, V. y Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. Recuperado el 17 de mayo del 2011, de: http://reiec.sites.exa.unicen.edu.ar/nro-5-volumen-1

❖❖❖

Naipes, dominóes y curiosidades en la enseñanza de la matemática en educación primaria

César Fernando Solís Lavado
Facultad de Educación de la Universidad Nacional del Centro del Perú - Perú.
cefer_solis@hotmail.com

Resumen

A muchos adultos no les gusta la matemática, esto debido a que cuando eran niños estudiaron esta área de manera muy abstracta, algorítmica y memorista, por ello hoy, es conveniente cambiar actitudes y creencias erróneas, y desarrollar en los niños de educación primaria actitudes positivas hacia la matemática, mediante la aplicación de estrategias didácticas específicas del área que implican el uso de material lúdico como los naipes, los dominóes y las curiosidades matemáticas.

Palabras clave: Naipes, dominóes, curiosidades matemáticas, enseñanza de la matemática.

Introducción

La crisis de la educacion matemática en nuestro país se debe a muchos factores, entre ellos las actitudes negativas que tienen nuestros educandos hacia la matemática y, al desconocimiento y la escasa aplicación de estrategias didácticas vinculadas al uso de material lúdico como los naipes, los dominóes y las curiosidades matemáticas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en niños de educación primaria.

Entonces, como catedráticos y profesores de educación primaria en el área de matemática nos sentimos motivados y comprometidos con el desarrollo de actitudes positivivas hacia el aprendizaje de la matemática en nuestros niños de educación primaria, y para ello es muy

conveniente el diseño, la elaboración, experimentación y validación de diversos materiales didácticos acordes con la edad, con las motivaciones, con los intereses y necesidades curriculares de nuestros educandos.

Vidal i Raméntol, S. (2005; 20) cita a Beltran, J. (1985) cuando afirma que si un alumno es forzado por su profesor por estudiar matemáticas en un ambiente agradable, como consecuencia de esos sentimientos agradables asociados con el estudio de las matemáticas, el alumno desarrollará actitudes positivas hacia esa materia.

En la enseñanza de la matemática, Stella Ricotti (2006; 14) señala que se debe presentar situaciones atractivas desde lo lúdico. Situaciones que despierten el placer del desafío, de la búsqueda, el reconocimiento de la importancia de hacerse y hacer buenas preguntas y la necesidad de experimentar las propias ideas, de confrontarlas y de discutirlas. En esta perspectiva se debe brindar la oportunidad de desarrollar en los alumnos: la curiosidad por explicar algunas paradojas, trucos de adivinación, la matematización de conceptos reales, el reconocimiento de fenómenos matemáticos en la naturaleza, la belleza de la mtemática y la fantasía.

Letona, J. (2010; 16) sostiene que los adjetivos bello, fascinante, sencillo, brillante, hermoso, deberían estar presente en el aula cuando se explican las matemáticas. También resalta que a los educandos se les debe ofrecer problemas, paradojas, divertimentos y acertijos con explicaciones sencilas basadas en razonamiento al alcance de todos y que sirven de base para comprender y apreciar la matemática.

En base a lo expuesto, los objetivos del desarrollo del taller: *Naipes, dominóes y curiosidades en la enseñanza de la matemática en educación primaria*, son los siguientes:

- Socializar con los participantes al coloquio experiencias didácticas que han sido experimentadas y

validadas en niños de educación primaria de Huancayo.
- Promover el desarrollo de actitudes positivas de los niños hacia el aprendizaje de la matemática mediante la aplicación didáctica y lúdica de varios naipes, dominoes y curiosidades matemáticas.
- Evaluar la estructura matemática y el fundamento didáctico de la utilización en el aula de los naipes, dominóes y curiosidades matemáticas en educación primaria.
- Diseñar nuevos naipes y dominóes para otros contenidos curriculares del área de matemática en educación primaria.

El taller esta dirigido a profesores de educación primaria del primer al sexto grado y los temas matemáticos que se aborda con los naipes, dominóes y curiosidades matemáticas tienen relación con los siguientes contenidos:

- Cardinalidad y conjuntos.
- Tablas de multiplicación: “tabla del 9”, “tabla del 8”, etc..
- Multiplos y divisores.
- Operaciones con Fracciones.
- Relaciones “menor que”, “mayor que” e “igualdad” de números naturales y enteros.
- Operaciones conbinadas.
- Polígonos.
- Calculo mental en N.

Referencias

Alsina A. Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva*. Madrid: Narcea S.A. de ediciones.

Cabanne, N. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Buenos Aires: Bonum.

Cofré, A. Tapia, L. (2006*). Matemática recreativa en el aula*. Mexico: Alfaomega grupo editor, S.A.

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Educación, S.A.

Letona, J. (2010). *Uno + uno son diez*. Madrid: editorial La Muralla S.A.

Ricotti, E. (2005). *Juegos y problemas para construir ideas matemáticas*. Buenos Aires: Ediciones novedades educativas.

Ross, N. *Los naipes o juegos de cartas como recurso en la Enseñanza de la Matemática*. Recuperado el 10 de noviembre de 2011, de: http://www.juannavidad.com/dinamizacionescolar/losnaipesylasmates.htm

Vidal i Raméntol, S. (2005). Estrategias para la enseñanza de las matemáticas en secundaria. Barcelona: Laertes S.A. de ediciones.

❖❖❖

Elementos de referencia para la evaluacion en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas (versión de libro de resúmenes no puedo abrir el archivo que enviaron)

David Esteban Espinoza
Universidad Ricardo Palma - Perú
nabetse11@yahoo.es

Manuel Humberto Malca Montoya
Universidad Ricardo Palma - Perú
manuelmalca@hotmail.com

Resumen

Se evalúa en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas con la finalidad de asumir decisiones sobre el contenido (transposición didáctica) y acerca de la metodología del trabajo en el aula (ingeniería didáctica) Fandiño (2002). El significado de evaluación ha experimentado una evolución desde la antiguedad hasta los inicios del siglo XXI lo que implicaba evaluar en orden cronológico: habilidades cognitivas, confianza en los tests como medición de aprendizaje, regulación de actividades mentales, logro de objetivos, evaluación dirigida al estudiante – docente – currículo, retorno hacia la psicometría y en la visión "antropológica" – "pragmática" de realidad de vida en el aula. Si la evaluación pretende brindar datos pertinentes, entonces debería convertirse en instrumentos que permita al docente – estudiante a optimizar el proceso de enseñanza – aprendizaje. Los trabajos sobre teoría de la evaluación, estudian concepciones relativas a evaluación, valoración; del mismo modo remarcan sobre la importancia de las concepciones del docente de matemática en relación con la evaluación, la necesidad de innovar en el campo de la evaluación discriminando con espíritu crítico los distintos modelos de evaluación en matemática, distinguiendo claramente los procesos de competencia en matemática. Al respecto la teoría de la

idoneidad didáctica al tratar de interrelacionar las distintas facetas que intervienen en el diseño, implementación y evaluación de procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y al introducir la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos a partir de un modelo explícito sobre el conocimiento matemático y bases pragmáticas – antropológicas podrían ofrecer los elementos de referencia necesarios para la evaluación en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: Elementos, marco de referencia, evaluación.

Referencias

Castillo y Cabrerizo (2008). *Evaluación educativa y promoción escolar*. Pearson Prentice Halll. Madrid.

D'Amore Maier (2003). *Producciónes escritas de los estudiantes sobre argumentos de matemáticas* (TEPs). Espsilon. (Cádiz, Spagna). 18(2), 53, 243-262.

Godino (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de eneseñanza y aprendizaje de las matemáticas*.

Fandiño (2002). *Curriculo evaluación y formación docente en matemáticas*. Editorial Norma. Guatemala.

Rico (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, cap. 3. pp. 69-108, en *Kilpatrik*, J.; Gómez,

Thomas Romberg (1989). *Mathematics assessment and evaluation.* State University of New York Press.

❖❖❖

Un aprendizaje razonado de la función cuadrática con el uso de software GCALC (versión del libro de resúmenes)

Olimpia Rosa Castro Mora
Unidad de la Medición de la Calidad Educativa–Ministerio de Educación- Perú
olimpiacastro@hotmail.com

Resumen

Siendo la función un concepto unificador de todas las matemáticas, no puede centrarse solo en sus representaciones (tablas, gráficos, símbolos) ni que la finalidad esté en que los estudiantes conozcan las diferentes clasificaciones (lineal, cuadrática, exponencial, etc.) como un capítulo especial en el programa de matemática.

Buscamos que los estudiantes logren hacer conexiones entre las diferentes representaciones de las funciones y lo relacionen con los fenómenos de la vida cotidiana. En esto, la tecnología ofrece oportunidades ya que permite hacer diversas representaciones que sustentan diferentes formas de pensar sobre los objetos matemáticos y de manipularlos.

En esta línea, se realizó una experiencia de tres sesiones de clase con los alumnos de tercero de secundaria del Colegio América del Callao para el tema de Funciones Cuadráticas usando el laboratorio de informática y el software libre GCalc en el desarrollo de las clases de matemática. Esta propuesta permite que el alumno afiance la noción de función y aprenda razonadamente la función cuadrática, sus elementos, la conexión con la ecuación cuadrática, la traslación de la parábola y tenga una herramienta para resolver problemas.

La primera sesión fue de actividades introductorias para representar gráficamente en GCalc algunas funciones,

como $f(x) = x^2 + 2x - 8$ entre otras, donde los estudiantes identificaron el vértice de la parábola relacionado con el punto máximo o mínimo, la línea de simetría, los interceptos tanto con el eje x como con el eje y, el sentido de las raíces así como el significado del discriminante. En la segunda sesión, con la guía impresa, los estudiantes graficaron cuatro funciones en un mismo plano, trabajando gradualmente la parábola $y = ax^2$ y su traslación tanto vertical como horizontal, hasta generalizar la traslación $y = a(x - h)^2 + k$. En esta actividad los alumnos predicen el movimiento que tendrá la parábola y la verifican. En la tercera sesión, se les propuso problemas que en base a la representación gráfica y su interpretación pudieron dar solución a diversas preguntas dadas. Por ejemplo: Una pelota se patea del piso hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m por segundo. ¿En qué tiempo la pelota caerá al piso?, ¿cuál será la altura máxima que alcanza?, ¿en qué tiempo estará a 15 m del piso? Los alumnos grafican $y = 20x - 5x^2$ y responden las preguntas.

Con esta propuesta los estudiantes parten de situaciones del contexto real para aplicar indistintamente todos los conceptos y las propiedades aprendidas para elaborar el gráfico y hacer su interpretación al resolver los problemas. Esta propuesta favoreció el desarrollo de habilidades matemáticas, pues a partir de la representación gráfica, elaboran conjeturas, realizan estimaciones, hacen generalizaciones, utilizan el lenguaje matemático para expresarse y lograr modelar situaciones.

Palabras clave: Función cuadrática, traslación de la parábola, modelización matemática.

Referencias

Holliday, M. Cuevas, C. Moure-Harris, D. Carter, H. (2003). Algebra 1. *Quadratic and Exponential Functions*. Glencoe/McGraw-Hill, 10, 524-553.

PCMI International Seminar Brief. (2009). Assets and Pitfalls in *Using Technology in Teaching and Learning Functions*. http://mathforum.org/~pcmi/technology11.25.09.pdf

PCMI International Seminar Brief. (2009). *The Place of Functions in the School Mathematics* Curriculum http://mathforum.org/pcmi/curriculum11.25.09.pdf

❖❖❖

Proyecto de museo matemático: una muestra de experiencias y modelos

Zenón Eulogio Morales Martínez
Colegio San Agustín Lima
morales.ze@pucp.edu.pe

Resumen

En esta nueva sociedad del conocimiento, necesitamos generar una "visión matemática" hacia el alumno, en la que el contenido matemático tenga realidad, en la que las ecuaciones y figuras dejen su hábitat cotidiano de cuadernos y libros para presentarse ahora en una realidad visible e impresionable que permita fortalecer en el alumno un requisito fundamental del aprendizaje: "querer aprender", siendo este el punto de partida de la nueva corriente curricular propuesta en nuestro colegio San Agustín, llamada "el currículo por competencias". Esta propuesta se plantea el año 2009.

Tomando la experiencia de distintos museos de matemáticas en el mundo, como el Museu de Matemàtiques de Catalunya –MMACA–(España), el Museo de Matemáticas de Querétaro(México), entre otros; los profesores del área de matemáticas nos propusimos implementar en nuestro colegio, el Museo de Matemáticas San Agustín –MMASA–(Perú), con el apoyo de alumnos del Tercer año de Educación Secundaria.

Palabras clave: Proyecto de área, Museo Matemático, Trabajo cooperativo.

Desarrollo del Proyecto

En el marco de la vida escolar también son habituales distintas propuestas de actividades extraescolares, que incluyen exposiciones entre las que no han sido demasiado frecuentes las exposiciones matemáticas. Esta propuesta al cambio, tiene la finalidad de promover el

interés de los alumnos hacia los objetos matemáticos mediante las exposiciones matemáticas, citamos algunos objetivos:

- Permitir a los alumnos "hacer matemáticas con placer".
- Mostrar representaciones visuales que promuevan el aprendizaje de las matemáticas.
- Ofrecer a los maestros ciertos instrumentos pedagógicos y promover experiencia manipulabes.

Para la realización del proyecto del MMASA, los alumnos de cada aula, forman grupos de 5 o 6 alumnos, los cuales realizaron un proyecto específico, de una de las muestras propuestas:

Muestra 01: *Comparación de cilindros huecos:* pretende responder la pregunta: ¿por donde pasará más aire, por el tubo de 20 cm de diámetro o por dos de 10cm?

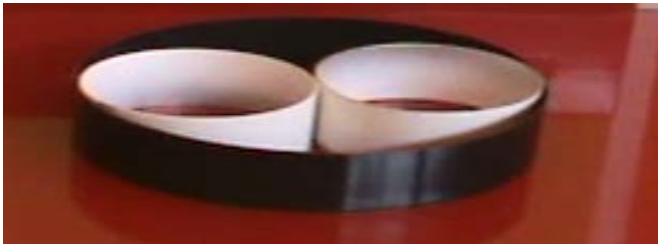


Fig. 1: Cilindros huecos

Muestra 02: *Comparación de cilindros macizos:* pretende responder la pregunta: ¿cuántos cilindros de 30 mm de diámetro nos harán falta para equilibrar un cilindro de 60 mm de diámetro?

Muestra 03: *Comparación de longitudes de circunferencias:* Pretende responder la pregunta: ¿quién tiene más longitud, una circunferencia de 30 cm de diámetro o dos de 15 cm de diámetro?

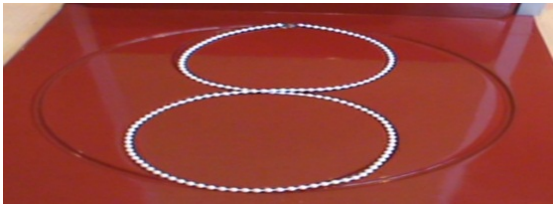


Fig. 2: Maqueta comparando circunferencias

Muestra 04: *El omnipoliedro.* Es un cuerpo geométrico en el cual se inscriben los cinco sólidos platónicos. De adentro hacia afuera se encuentran el octaedro, el hexaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Cada poliedro se presenta con distintos colores.

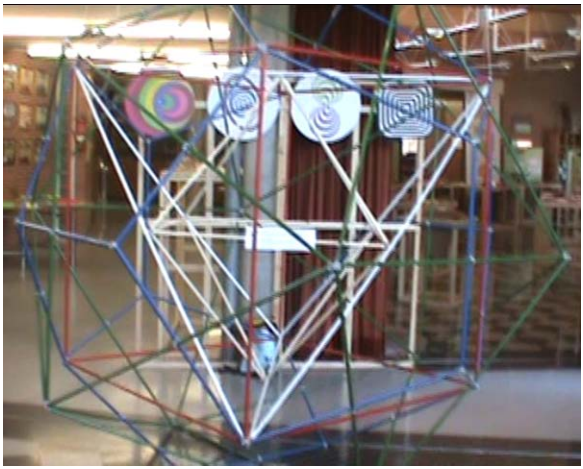


Fig. 3: Onmipoliedro del museo de MMACA (España)

Construcción del omnipoliedro:

La elaboración de cada poliedro, se puede efectuar con sorbetes de colores. Tener en cuenta que cada poliedro se inscribe en otro. El poliedro más interior es el octaedro y el más exterior es el icosaedro. A los poliedros convexos regulares se le denominan también como sólidos

platónicos pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.

Poliedro regular	Caras	Vértices	**Aristas (# de Sorbetes)**
Tetraedro	4	4	6 (blanco)
Cubo	6	8	12 (amarillo)
Octaedro	8	6	12 (rojo)
Dodecaedro	12	20	30 (azul)
Icosaedro	20	12	30 (verde)

Entre 5 alumnos, cada uno elabora un poliedro, luego lo inscriben (incluir uno dentro de otro), deben coordinar sobre los tamaños de cada uno para que cuando lo coloquen uno dentro de otro, resulte un omnipoliedro casi perfecto. Un alumno (adicional) se encargará de buscar información sobre omnipoliedro, ¿quién lo descubrió?, ¿qué significa la palabra omnipoliedro?. Esto servirá de argumentos para el día de la presentación final.

Muestra 05: *Fractales con espejos.* Se muestran figuras con disposición simétrica con espejos donde se reflejan estas figuras dando una impresión de ampliación.

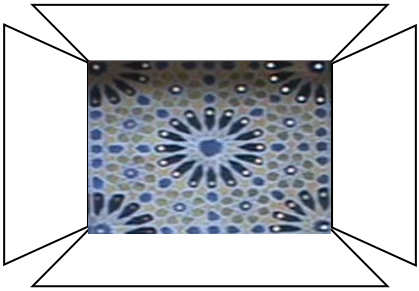


Fig. 4: Esquema de fractales

Muestra 06: *La flor mágica.* Se propone colocar los números del 1 al 9, de manera que la suma de los tres de ellos en cada diagonal sume 15.



Fig. 5: Flor Mágica, con 9 números

Muestra 07: *Sumas.* Coloca los números de manera que la primera columna sume la mitad de la segunda y la segunda columna sume la mitad de la tercera.



Fig. 6: Sumas, con 6 números

Muestra 08: *El triángulo mágico*. Se disponen de las fichas: 1, 6, 6, 1, 2, 2, 3, 5, 5, 8. Se ordenan de modo que el producto de 3 de ellas resulte el número encerrado e los triángulos parciales.

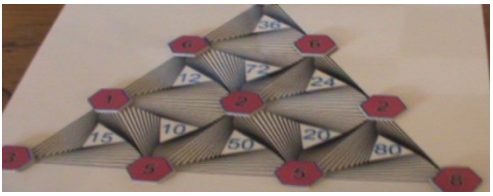


Fig. 7: Triángulo Mágico, con 10 números

Muestra 09: La *división mágica*. Coloque los seis números (2, 4, 8, 16, 32 y 64) de manera que en cada lado del triángulo se obtenga el cociente de los números que te primeros (siempre el mayor dividido por el menor)



Fig. 8: División Mágica, con 6 números

Conclusiones

Para la evaluación de este proyecto empleamos una rúbrica. Muchos expertos creen que las rúbricas mejoran los productos finales de los alumnos y por lo tanto aumentan el aprendizaje.

Al concluir el tercer bimestre los alumnos presentaron los trabajos cumpliéndose los objetivos planteados. Se logró aumentar el interés por los objetos matemáticos, debido a la manipulación de las muestras elaboradas. Dejamos a los maestros y alumnos el mensaje en catalán que se muestra en el Museo de Catalunya (España): *"Les matemátiques entre per les mans"* que nos dice: "Las matemáticas entra por las manos". Esperando que los maestros promuevan más exposiciones donde se muestre que la matemática es interesante y maravillosa cuando nos permitimos conjugar los objetos matemáticos con la creatividad y las representaciones artísticas.

"¿Cómo explicar que las matemáticas, un producto de la mente humana, independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente bien a los objetos de la realidad?" **Albert Einstein**

Referencias

Exposiciones Matemáticas UNO (2009). Revista de Didáctica de las Matemáticas No. 52 Julio, Agosto, Septiembre 2009. Barcelona, España: Ediciones GRAO.

❖❖❖

Las representaciones semióticas: una estrategia didáctica en la enseñanza del álgebra

Zenón Eulogio Morales Martínez.
Pontificia Universidad Católica del Perú.
morales.ze@pucp.edu.pe

Resumen

En este póster se pretende mostrar actividades basadas en la teoría de los registros de representación semiótica sobre el tema de funciones, que permiten el aprendizaje del Álgebra y el desenvolvimiento del pensamiento algebraico. Se muestran actividades orientadas a la utilización de los registros de representación semiótica, se espera con este trabajo divulgar los aspectos relevantes a la teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (2009) que permitan potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en los alumnos.

Palabras clave: Álgebra, Procesos de enseñanza y aprendizaje, representaciones semióticas, funciones, pensamiento algebraico.

Fundamentación

Los objetos matemáticos y su relación con los símbolos reside en el factor de que para pensar sobre ideas y conceptos matemáticos es necesaria una representación interna, de forma que el cerebro sea capaz de operar y comunicar estas ideas y conceptos. De la misma manera, es preciso una representación externa que nos posibilite la comunicación, Así mismo, los signos externos de representación tiene un equivalente mental, lo que torna necesaria una distinción entre las representaciones internas y externas.

La relación entre estas dos modalidades de representación fue expresada por Duval (2009), para que

las representaciones mentales y las representaciones externas no pueden ser vistas como dominios diferentes, pues el desenvolvimiento de las representaciones externas se da como una exteriorización de las representaciones mentales (internas) y la diversificación de las representaciones de un objeto, aumenta la capacidad cognitiva del sujeto y, por consiguiente, sus representaciones mentales. Del mismo modo, las representaciones externas, como enunciados en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, entre otros, son los mejores a través de los cuales los individuos exteriorizan sus representaciones mentales y se tornan accesibles.
Las siguientes actividades permitirán a los estudiantes realizar transformaciones externas (conversiones) en distintas representaciones:

ACTIVIDAD 01:

Dado el conjunto de círculos en la representación gráfica:

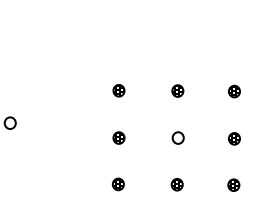


Fig. 1

Fig. 2

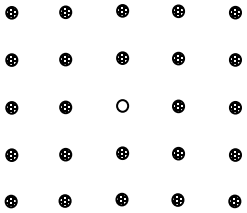
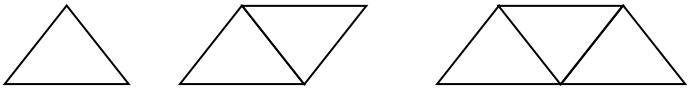


Fig. 3

A) Obtenga una conversión y obtenga una representación algebraica (regla de correspondencia)

B) Si los círculos negros son los asistentes al concierto del cantante representado con círculo blanco. ¿Cuántas personas asistieron a un concierto representado con la figura 50?

ACTIVIDAD 02:
Construya triángulos utilizando palitos conforme del diseño:



A) ¿Cuántos palitos son necesarios para formar cuatro triángulos? Y para formar cinco triángulos? Registre lo que usted observa.
B) Haga representaciones relacionando los triángulos y la cantidad de palitos.
C) Establezca la expresión que permita calcular la cantidad de palitos necesaria para formar un número en cualquiera de los triángulos.

ACTIVIDAD 03:
Un vendedor de libros recibe un salario fijo de $ 800,00 más $ 15,00 por libro vendido. Represente la evolución del salario si debe vender 0, 2, 3, 5, 8, 9, 10 libros. A partir de esa representación construya el gráfico correspondiente y responda:

a) El salario es variable?
b) El número de libros vendidos es variable?
c) El salario depende de qué?
d) Encuentre un modo que permita expresar el cálculo de salario para cualquier número de libros vendidos.
e) ¿Cuál es el valor del salario si debe vender 25 libros? Si al final de mes recibe un salario de $995,00, ¿cuántos libros se han vendido?

Comentarios

La pregunta propuesta se presenta descrita en la representación simbólico-numérico y en lengua natural y envuelve, necesariamente, transformaciones de tratamiento y conversión. Los tratamientos son evidenciados en la construcción de una representación

para su evolución de salario, dentro de registro simbólico numérico y la resolución e interpretación de los ítems a, b, c, e. Para las actividades de conversión, se manifiesta la construcción gráfica y la elaboración de una ley de formación para la situación propuesta (ítem d), cuya expectativa es un pasaje para el registro simbólico-algebraico. Cognitivamente, esta actividad busca hacer con que el alumno interprete, describa y sea capaz de representar funciones simples de forma analítica (representación algebraica) y gráfica (matematizada inicial). Además, trabajar las ideas de reconocimiento de variables dependientes e independientes, la diferencia entre variable continua y discreta, la construcción de gráficos, la interpretación de dados de las nociones de incógnita, que son importantes para la elaboración del concepto de función.

Referencias

Artigue, M. (1996). *Engenharia Didáctica*. *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano*. *Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Sao Paulo, Brasil: Editora Livraria da Física.

Lopes, L. (1999). *Manuas das Funcoes Exponeciais e Logarítmicas*. Brasil: Editorial Interciéncia.

❖❖❖

A aplicação da modelagem matemática no ensino médio a luz da teoria dos registros de representação semiótica.

Patricia Maria dos Santos
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – RJ – Brasil
patriciajfrancisco@ig.com.br

Nilson Sergio Peres Stahl
Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro – RJ – Brasil
nilsonstahl@ig.com.br

Resumen

Este projeto investiga a aplicação Modelagem Matemática como metodologia alternativa de ensino frente ao ensino tradicional. O processo de análise dos dados será discutido á luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica preconizado por Raymond Duval. A pesquisa ocorreu no Instituto Superior de Educação Professor Aldo Muylaert (ISEPAM) na Cidade de Campos dos Goytacazes com uma turma do 1 º ano do ensino médio explorando o conteúdo função quadrática. Este trabalho de pesquisa utilizou como coleta de dados o diário de bordo do professor e questionário aplicados aos alunos. Os resultados, mesmo que parciais, apontam que a Modelagem Matemática é um facilitador da construção do conhecimento em Matemática e, ao permitir diversos tipos de representação semiótica, contribui para a compreensão do educando.

*Palavras Chave***:** Modelagem Matemática, Representação Semiótica, Educação Matemática, Metodologia de Ensino.

Modelagem Matemática

Bassanezi (2002) define modelagem matemática como um processo dinâmico utilizado para obtenção de modelos matemáticos. Ainda conclui que a modelagem consiste,

essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos.

Segundo Bassanezi e Ferreira, (1998), a modelagem busca, a partir de um problema não Matemático, sua solução através de um modelo dentro de uma teoria Matemática conhecida que facilite sua obtenção. Os autores lembram que os métodos existentes em dada teoria podem não ser suficientes para a resolução do problema e não convergir para os resultados desejados. Neste caso, recomendam os autores, volta-se ao problema inicial, simplificando-o sem, contudo, descaracterizá-lo, mas tornando-o matematicamente tratável.

A modelagem Matemática, de acordo com os autores em suas diversas fases, está representada na figura 1.

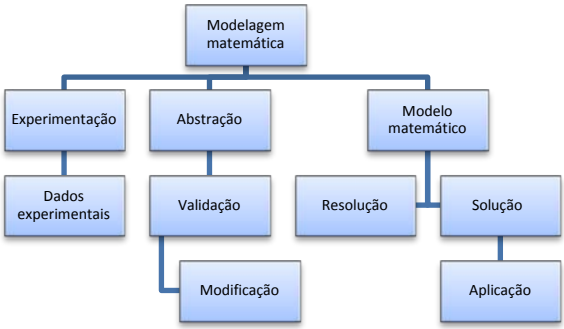


Figura 1 - Esquema de uma modelagem matemática.
Fonte: Bassanesi e Ferreira (1998).

De acordo com este esquema, os autores identificam diversas etapas, a saber:

1. **Experimentação**. Obtenção de dados experimentais ou empíricos que ajudam na compreensão do problema, na modificação do modelo e na decisão de sua validade. É um processo essencialmente

laboratorial e/ou estatístico, além de incluir atividades elementares, como "medir e fazer contas".

2. **Abstração**. Processo de seleção das variáveis essenciais e formulação, em linguagem "natural", do problema ou situação real.
3. **Resolução**. O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem do universo matemático. O estudo do modelo depende de sua complexidade e pode incluir processos numéricos. Quando os argumentos conhecidos não são suficientes, novos métodos podem ser necessários, ou então o modelo deve ser simplificado.
4. **Resolução**. O modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem do universo matemático. O estudo do modelo depende de sua complexidade e pode incluir processos numéricos. Quando os argumentos conhecidos não são suficientes, novos métodos podem ser necessários, ou então o modelo deve ser simplificado.
5. **Validação**. Comparação entre a solução obtida via resolução do modelo Matemático e os dados reais. É um processo de decisão de aceitação ou não do modelo inicial. O grau de aproximação desejado será o fator preponderante na decisão.
6. **Modificação**. Caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, deve-se modificar as variáveis ou a lei de formação e com isso o próprio modelo original é modificado e o processo se inicia novamente.
7. **Aplicação**. A modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças.

O modelo, segundo D'AMBROSIO (1986), seria o ponto de ligação entre as informações captadas pelo indivíduo e sua ação sobre sua realidade. O modelo situa-se no nível do indivíduo e é criado por ele como um instrumento de

auxílio para a compreensão da realidade. O processo de modelagem, ou seja, o caminho de criação do modelo, ainda segundo o autor, é o processo mediante o qual se definem as estratégias de ação do sujeito sobre a realidade.

Representação semiotica no ensino da matemática

Entendemos a aprendizagem como um processo que depende de vários fatores, entre eles destacamos: o ambiente, professores, alunos e as ferramentas a que têm acesso. Entre essas ferramentas, segundo Duval (2008), estão os sistemas de representações externas, tais como os símbolos matemáticos, as representações gráficas e a escrita em língua natural. Destaca a importância dos registros de representação semiótica na evolução do pensamento matemático, ... "é suficiente a história do desenvolvimento da matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição para a evolução do pensamento matemático". Ainda segundo o autor, as transformações dos registros de representação semiótica podem ser classificadas em dois tipos: **tratamentos** e **conversões**. Estão diretamente relacionados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático em estudo. Por exemplo, o cálculo é uma forma de tratamento próprio às escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico). E a conversão de uma representação ocorre entre registros diferentes. Ela é a modificação de uma representação para outra, em outro registro, porém, conservando o mesmo objeto matemático. Ilustra-se a atividade de conversão, por exemplo, por meio da passagem de uma representação lingüística para uma representação figural acerca de um determinado objeto matemático.

Ainda segundo Duval (2004, apud Vertuan, 2007) a utilização de diferentes representações semióticas contribui para a reorganização do pensamento do aluno e influencia a atividade cognitiva da pessoa que as utiliza.

Nesse sentido, as representações semióticas são essenciais para a compreensão dos conceitos matemáticos. O autor considera que entender estas representações simplesmente como suporte para as representações mentais, consiste numa visão ingênua e errônea. Nesse contexto o autor apresenta e faz distinção entre os termos "semiósis" e "noésis". Entende-se por semiósis "a apreensão ou a produção de uma representação semiótica" e por noésis, os atos cognitivos, como "apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência".

Metodologia

A pesquisa está sendo desenvolvido em duas turmas do 1º ano do ensino médio do Instituto Superior de Educação Professor Aldo Muylaer (ISEPAM) na Cidade de Campos dos Goytacazes. Numa das turmas o professor desenvolverá, ao longo do ano letivo de 2011, os conteúdos em matemática prevista no seu plano de curso por meio da metodologia "tradicional", basicamente utilizando aula expositiva e livro texto.

Para desenvolvimento da pesquisa são **realizados análise local** como sendo a verificação da Representação identificável, tratamento e conversão entre os registros e estabelecemos critérios de classificação a partir dos registros estabelecidos pelos alunos nas atividades propostas. São os critérios:

Critério 1- O aluno não reconhece esta representação, o que ela representa no conteúdo matemático.
Critério 2- O aluno só usou os diferentes registros sem estabelecer relações entre eles (realizou somente tratamentos);
Critério 3- O aluno usou os diferentes registros e estabeleceu relações entre eles (realizou conversões);

RESULTADO

O quadro 1 apresenta os resultados da questão 1 referentes aos registros de representação semiótica executados pelos 25 educandos do primeiro ano do ensino médio.

Questão	Itens	Classificação -1 ano do ensino médio (estudante=25)		
		Critério 1 (representação)	Critério 2 (Tratamento)	Critério 3 (Conversão)
1	A	20	20	20
	B	8	8	8

Na primeira questão em seu item "a" analisamos o tratamento realizado pelo educando diante da situação proposta. Apenas um deles, o aluno "L" realizou a conversão figural (construção do gráfico) e esta apresentada. Mas os 20 alunos realizaram as três atividades cognitivas: representação, tratamento e a conversão (registro de língua natural registro algébrico).

O item **b** pede ao educando que determine altura máxima prescrita pela pedra e o seu respectivo tempo. Desse grupo, 2 alunos realizaram a conversão para o registro figural do registro algébrico para o registro gráfico. No grupo 8 alunos desenvolveram a conversão do registro figural para o registro gráfico e o mesmo desenvolveu o tratamento (cálculo).

O teste aplicado a turma foi feito de modo a se analisar os três critérios baseados na teoria de representação semiótica. De acordo com os resultados explicitados no quadro 1, podemos concluir que a maioria dos alunos resolveram numericamente as questões. O teste aponta para o fato de que os educandos não apresentam compreensão para a conversão dos registros, ficando só no tratamento. Isto pode ser explicado, entre outros motivos, por não haver uma tradição entre a maioria dos

professores em explorar as diversas conversões possíveis entre registros.

As atividades propostas pelos professores, deveriam estar relacionado com os modelos no qual criaria no aluno uma relação do que foi desenvolvido na sala de aula é uma melhor compreensão no modo de resolver as questões.

Referências

Bassanezi, Rodney C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

D'Ambrosio, Ubiratan. *Da Realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática*. Campinas: Ed. da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

Damm, Regina F. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC, 1999.

Duval, Raymond. *Registros de Representações Semióticas e* Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Editora Papirus, 4ª edição, 2008.

Vertuan, Rodolfo Eduardo. *Um olhar Sobre a Modelagem Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica*. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciências e Educação Matemática)- Programa Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina.

❖❖❖

Índice de Autores

Advíncula, 85, 141, 235
Almouloud, 133
Alves, 411
Aparecida, 191
Artigue, 17, 33
Atamari, 175
Azañero, 177
Beteta, 55
Bielschowsky, 259
Borges, 203
Calderón, 375
Camargo, 127
Cárdenas, 351
Carolino, 399
Carrillo, 185
Castro, Olimpia, 447
Castro, Walter, 25, 53
Ccayahuallpa, 377
Cieza, 403
Coronado, 231
Cuéllar, Fredy, 375
Cuellar, Mayda, 391
Cuya, 97
Da Conceição, 259, 399
Da Fonseca, 259
Da S. Shimonishi, 371
Da Silva, 133
Delgado, 141
Díaz, 243, 295
Dos Santos, 463
Durán, 391
Duval, 19, 37
Echeverry, 127
Espinoza, 445
Fernández, 243
Ferraz, 287, 379, 385
Ferreira, 207
Flores, Irma, 231
Flores, Jesús, 29, 297
Fortunato, 399
Fuentes, 393
G. Andrade, 371
García, 161, 269, 335, 343
Gonzaga, Emilio, 97
Gonzaga, Miguel, 123
González, 83, 121
Huapaya, 363
La Plata, 109, 431
León, 249
Luna, 261
Malca, 445
Márquez, 319
Matildo, 159
Mayta, 125
Mechán, 419
Medina, 123
Molina, Diógenes, 305
Molina, Oscar, 127
Morales, 313, 451, 459
Mosquera, 321
Nobre, 411, 425
Núñez, 195
Ordoñez, 243
Osorio, 67, 293
Peres, 217
Perry, 127
Proleón, 269, 335, 343
Reaño, 85, 413
Regis, 411
Ricaldi, 149
Rocca, 377
S. Coutinho, 171

S. Gregorio, 217
Salvador, 329
Samper, 127
Sánchez, 121
Sandoval, 297
Santos, 399
Saravia, 275
Sergio, 463
Soares, 259
Soliani, 191, 371
Solís, 441
Tipe, 97
Torres, 397
Trigueros, 23, 41
Valério, 171
Vallejo, 109
Velásquez, 125
Vieira, 203, 425
Vigo, 203, 207, 411, 425
Villogas, 235
Zaparoli, 287